Optimalizačné úlohy – trvalá hlbšia pozornosť

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

Úvod

Niektoré optimalizačné úlohy riešil už Euklides názorne cez obrázky a vhodné úvahy. V dnešnej dobe ich môžeme uplatniť aj na základnej škole algebricky, na strednej škole v nižších ročníkoch využitím poznatkov o vlastnostiach funkcií (napr. kvadratickej), vo vyšších ročníkoch využitím diferenciálneho počtu.

Ukážka

Predvedieme si v úvode naznačenú príležitosť na príklade: Štvorec má zo všetkých pravouholníkov s daným obvodom maximálny obsah.
.

A. Algebrickým výpočtom

Majme obdĺžnik so stranami a, b ($a>b$). Štvorec s rovnakým obvodom má stranu dĺžky $m = (a+b)/2$, potom jeho obsah je $m^2 = (a^2 + 2a.b + b^2)/4$. Obdĺžnik mal obsah $a.b$. Keďže pre každé kladné reálne čísla $a>b$ platí: $(a-b)^2 > 0$, potom : $a^2 - 2a.b + b^2 > 0$

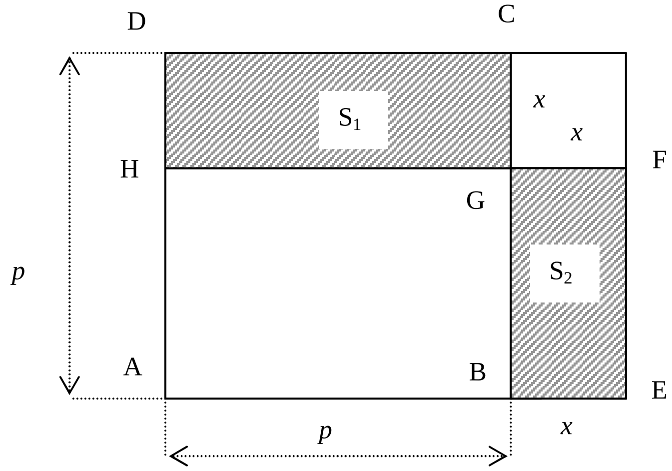
$$a^2 + 2a.b + b^2 > 4a.b$$

$$\frac{\left(a^2 + 2ab + b^2\right)}{4} \rangle a.b \ ,$$

teda obsah štvorca (s rovnakým obvodom aký má obdĺžnik) je vždy väčší ako obsah všetkých obdĺžnikov s daným obvodom.

B. Geometricky (Euklides :Základy)

Predstavme si, že zo štvorca s dĺžkou strany p vytvoríme obdĺžnik s rovnakým obvodom ako má štvorec (z jednej strany uberieme úsek dĺžky x ($x > 0$, $x < p$) a pridáme ho k druhej strane (pozri obr.1)



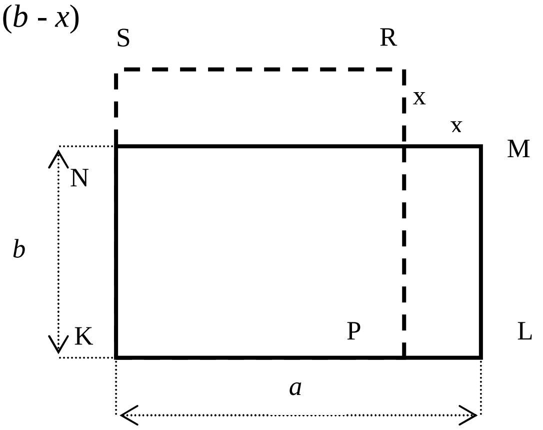
Obr.1

O(ABCD) = $4.p$, O(AEFH) = $(p - x).2 + 2.(p + x) = 2.p – 2.x + 2.p + 2.x = 4.p$

Dostaneme obdĺžnik AEFH (s rovnakým obvodom), ktorý má obsah: $(p - x)\mathbf{.}(p + x) = p^2 - x^2$.
Pretože ak $x > 0$ a $x < p$, zrejme platí: $p^2 > p^2 - x^2$, teda potom obsah štvorca (s rovnakým obvodom) je väčší než obsah ľubovoľného obdĺžnika s tým istým obvodom.
Euklides presviedčal svojich súkmeňovcov o tom z obrázku porovnávaním obsahov S_1 a S_2 (obr.1): $S_1 = p.x$, $S_2 = x.$(p - x), pretože pre ľubovoľné kladné $x< p$, $x > 0$ platí: $p.x > p.x - x^2$, teda $S_1 > S_2$.
Potom obsah štvorca ABCD je väčší ako obsah obdĺžnika AEFH (s rovnakým obsahom).
(Alebo: obsah štvorca ABCD je p^2, obsah obdĺžnika AEFH je $(p + q).(q - x) = p^2 - x^2$, teda pre $x < p$ a $x> 0$ je $p^2 > p^2 - x^2$).
Presvedčil *Euklides* aj našich žiakov v základnej škole?

C. Využitím vlastností kvadratickej funkcie

Obsah pravouholníka KPRS (obr. 2), ktorý dostaneme z obdĺžnika KLMN skrátením (a-x) a predĺžením ($b + x$) označíme $y = (a - x).(b + x)$, t.j. $y = a.b + x.(a - b) -x^2$. (Obvod je konštantný: $2a + 2b = 2.(a - x) + 2.(b - x)$)



Obr.2

Obsah y je teda kvadratickou funkciou premennej x (x>0, x<a). Hľadajme pre ktoré x má hodnota funkcie y maximum.

$$y = -x^2 + (a-b).x + a.b$$

po doplnení na druhú mocninu dvojčlena:

$$y = -\left[x - \frac{a-b}{2}\right]^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

hodnota y bude maximálna, ak sa vo výraze nič neodčíta, t.j. ak $x = \frac{a-b}{2}$, teda nový pravouholník bude mať maximálny obsah, ak $x = \frac{a-b}{2}$. Potom jeho rozmery sú:

$$m = a - x = a - \frac{a-b}{2} = \frac{2a-a+b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$n = b + x = b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

teda $m = n$ a tento pravouholník je štvorec.

D. Využitím diferenciálneho počtu

Funkciu $y = -x^2 + (a-b).x + a.b$ určíme ako v postupe C, jej maximum nájdeme použitím derivácie: $y' = -2x + a - b = 0$, ak položíme $y' = 0$.

Z toho:

$$a - b = 2.x$$

$$x = \frac{a-b}{2}$$

$$y'' = -2 < 0,$$

teda maximum funkcie je pre:

$$x_0 = \frac{a-b}{2}.$$

Záver

Poslucháči učiteľského štúdia matematiky by si mali podobné didaktické možnosti uvedomovať včas a pravidelne, aby ich mohli využívať vo svojej pedagogickej praxi.

Literatúra

FISCHER, R.- MALLE, G. : *Človek a matematika*. Bratislava: SPN, 1992 (s.166-190) .

GÁL, T. - RŮŽIČKA, J.: *Elementární funkce v teorii a praxi*. Praha: SNTL, 1967 (s.389-390).

HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990.