S MIERNOU DÁVKOU LOGIKY

Dušan Jedinák
Trnavská univerzita v Trnave

Abstrakt: *Ukážka podnetných úloh pre uplatnenie logických postupov na základnej úrovni s miernym motivačným nábojom.*

Kľúčové slová: pozorné uvažovanie, logická argumentácia, vyučovanie matematiky

Úvod

Vysokoškolský profesor Ilja Černý v predhovore ku svojej knižke *Úvod do inteligentního kalkulu* (Praha: Academia, 2002) uznáva: *„Získal som pevné presvedčenie, že jednou z najdôležitejších úloh výučby matematiky má byť výcvik v logickom myslení v tom najširšom zmysle slova.“*

Vybral som päť nenáročných zadaní úloh a na ich riešení ukazujem postupne narastajúcu miernu dávku logického prístupu aj s primeranou školskou matematikou. Záverečná úloha vám pripraví prekvapenie, jej riešenie je už rafinovaným prejavom užitočných logicko-matematických úvah.

Votrelec

Úloha: Preskúmajte rozličné vlastnosti čísiel v jednotlivých radoch a vyraďte z každého nasledujúceho radu čísiel vždy jedno číslo, ktoré nepatrí (nezodpovedá ich „logike“) medzi ostatné čísla v príslušnom rade – svoj názor zdôvodnite:

a/ 12, 34, 58, 78
b/ 46, 84, 73, 91
c/ 134, 245, 467, 754, 689
d/ 1764, 4761, 6174, 6832, 7641

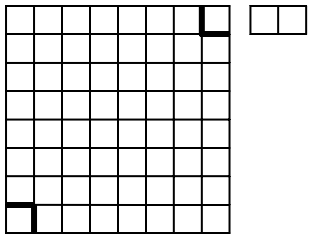
Riešenie:

a/ 58; ostatné sú dvojciferné čísla zostavené zo susedných „rastúcich“ číslic.
b/ 84; ostatné čísla majú súčet číslic rovnaký (10).
c/ 754; ostatné čísla sú zostavené z „rastúcich“ číslic.
d/ 6832; ostatné čísla sú zostavené vždy z tých istých číslic {1,4,6,7}.

Vystrihnutá šachovnica

Úloha: Ukážte, že ak zo šachovnice (8 x 8 štvorcových políčok) odstrihneme dve políčka v protiľahlých kútoch šachovnice, tak takúto „vystrihnutú“ šachovnicu nemožno úplne pokryť neprekrývajúcimi sa „dvojpolíčkovými obdĺžnikmi“.

Riešenie:



Ak si predstavíme aj striedanie farebných štvorčekov ako na šachovnici pre šachovú hru (striedavo biele a tmavé), uvidíme, že oba vystrihnuté štvorce majú rovnakú farbu. Na „vystrihnutej“ šachovnici je 32 štvorčekov jednej farby a len 30 štvorčekov druhej farby. Pokrývajúce „dvojpolíčkové obdĺžniky“ majú vždy jeden štvorček biely a jeden tmavý. Pri postupnom pokrývaní sa teda vždy pokryje obdĺžnik zložený z dvoch štvorčekov rôznych farieb! To znamená, že spomínaným postupom nemožno súčasne pokryť nerovnaký počet bielych a tmavých štvorčekov.

Šikovní hubári

Úloha: Sedem hubárov nazbieralo spolu 100 húb tak, že každý z nich nazbieral iný počet. Dokážte, že medzi nimi sú traja takí, ktorí dohromady nazbierali aspoň 50 húb.

Riešenie:

Usporiadajme počty húb nájdených jednotlivými hubármi vzostupne:

najmenej najviac

Priemerný počet nazbieraných húb je medzi počtom 14 – 15.

Ak je “prostredný” (označený štvorčekom) počet aspoň 15, tak potom od stredu napravo sú počty najmenej 16, 17, 18, to znamená spolu 51 a tým je dokázané tvrdenie našej úlohy.

Ak je “v strede” počet najviac 14, tak naľavo od stredu sú najviac počty 11, 12, 13, teda spolu so stredným počtom najviac 50, ale to znamená, že od stredu doprava bude súčet tých zvyšných troch aspoň 50 a to je tvrdenie našej úlohy.

Rozhovor dvoch matematikov

Úloha: Dvaja matematici (***A***; ***B***) sa takto zhovárali:

A: *Súčin vekov mojich troch synov je 36.*

B: *Táto informácia mi nestačí na určenie veku každého z nich.*

A: *Súčet vekov mojich synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.*

B: *Ani teraz sa nedá určiť pre tvojich synov ich vek.*

A**:** *Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.*

B: *Ďakujem, to stačí, už poznám, aký majú vek tvoji synovia.*

Koľko rokov má každý zo spomínaných synov? Koľko okien bolo na budove, ktorú videli matematici pred sebou?

Riešenie:

Vek synov je celočíselný. Rozložme číslo 36 na súčin troch kladných celých čísel a zapíšme hneď vedľa aj súčet ich veku:

1 . 1 . 36	*38*	1 . 6 . 6	*13*
1 . 2 . 18	*21*	2 . 2 . 9	*13*
1 . 3 . 12	*16*	2 . 3 . 6	*11*
1 . 4 . 9	*14*	3 . 3 . 4	*10*

Teraz jasne vidíme, prečo ***B*** nemohol po druhej odpovedi určiť vek synov – na budove bolo 13 okien. Teda sú dve možnosti pre vek synov : buď 1, 6, 6 alebo 2, 2, 9. Matematik ***A*** v poslednej odpovedi (*najstarší* z mojich synov) naznačil, že najstarší jeho syn nie je z dvojičiek (mali by rovnaký vek). Teda synovia majú vek dva, dva a deväť rokov.

Záhada dvanástich dukátov

Úloha: Medzi dvanástimi dukátmi je jeden falošný (nemá rovnakú hmotnosť ako ostatné). Stanovte postup, akým nájdete tento falošný dukát najviac tromi váženiami na rovnoramenných váhach, ak nie sú k dispozícii žiadne závažia.

Riešenie:

Ak rozdelíme 12 dukátov na tri skupiny po 4 dukátoch, porovnaním niektorých dvoch skupín môžu nastať v podstate dve možnosti:

A. Zvolené dve skupiny majú rovnakú hmotnosť, to znamená, že falošný dukát sa nachádza v zostávajúcej tretej skupine a všetky dukáty z porovnávaných skupín sú pravé. Označíme teda dukáty zo zvyšnej skupiny nasledovne:

1 2 3 4

Porovnajme teraz dukát ***1*** a dukát ***2*** s niektorými dvoma pravými dukátmi (sú v rovnovážnych skupinách). Môžu nastať opäť dve možnosti:

a) Ak sa hmotnosti rovnajú, znamená to, že falošný dukát je ***3*** alebo ***4***. Zoberieme dukát ***3*** a porovnáme ho s niektorým dukátom, o ktorom už vieme, že je pravý. Ak sú hmotnosti rovnaké, falošný je dukát ***4***, ak nie, tak je falošný dukát ***3***.

b) Ak sú hmotnosti rozdielne, znamená to, že falošný je buď dukát ***1*** alebo dukát ***2***. Porovnáme dukát ***1*** s niektorým pravým dukátom. Ak sa hmotnosti rovnajú, falošný je dukát ***2***. Ak nie, falošným dukátom je dukát ***1***.

B. Zvolené dve skupiny (po štyroch dukátoch) nemajú rovnakú hmotnosť.

1.skupina 2.skupina

5 6 7 8 9 10 11 12

Nech prvá skupina má väčšiu hmotnosť. Označme si dukáty oboch skupín postupne číslami 5 až 12.

Všetky ostatné dukáty, o ktorých už vieme, že sú pravé, označíme 1 – 4. To znamená, že falošný dukát sa nachádza v jednej z dvoch prvých skupín (5 - 8 môže byť ťažší, 9 - 12 môže byť ľahší) a všetky dukáty v tretej skupine (s č.1 - 4) sú pravé.

○ ○ ○ ○   ○ ○ ○ ○
5 6 7 9   8 1 2 3

Rozdelíme teraz dukáty 5 - 12 do skupín nasledovným spôsobom

(kde o dukátoch 1 – 3 už vieme, že sú pravé) a porovnáme ich (mimo zostali 10, 11, 12 a pravý dukát 4). Potom ich vážením môžu nastať tri možnosti:

○ ○ ○ ○ 〉 ○ ○ ○ ○
a) 5 6 7 9   8 1 2 3

Ak nastane tento prípad, znamená to (dukát 9 mohol byť ľahší, ale nie je), že falošný (ťažší) dukát je 5, 6, alebo 7. Zoberieme teda dukát 5 a 6 a porovnáme ich medzi sebou. Ak majú rovnakú hmotnosť, falošný je dukát 7. Ak nie, falošný je ten s väčšou hmotnosťou.

○ ○ ○ ○ 〈 ○ ○ ○ ○
b) 5 6 7 9   8 1 2 3

Ak nastane tento prípad, znamená to, že falošný dukát je dukát 8 (ťažší) alebo 9 (ľahší). Zoberme teda dukát 8 a porovnajme ho s niektorým, o ktorom už vieme, že je pravý. Ak sa hmotnosti rovnajú, falošný je 9. Ak sa nerovnajú, falošný je 8.

○ ○ ○ ○ = ○ ○ ○ ○
c) 5 6 7 9   8 1 2 3

Ak nastane tento prípad, znamená to, že falošný dukát je medzi 10 – 12, a o ňom už vieme, že bude ľahší. Zoberme teda dukát 10 a 11 a porovnajme ich medzi sebou. Ak sa ich hmotnosti rovnajú, falošný je dukát 12. Ak nie, falošný je dukát s nižšou hmotnosťou z posledného váženia.

Záver

Trvalým úsilím všetkých učiteľov má byť prispievanie školskej matematiky k rozvoju správneho uvažovania, spoznaniu základných pravidiel logického myslenia. Nielen vedecko-technická, ale aj spoločensko-kultúrna prax prehĺbia svoju užitočnosť vtedy, ak sa v nich budeme vyjadrovať stručne, zrozumiteľne a jednoznačne. V úvode spomínaný český matematik Černý svojou učiteľskou praxou spoznal, že *„ak človek hovorí sám sebe pravdu, môže si ušetriť mnohé ťažkosti*“.

Odporúčaná literatúra

[1] AUSBERGEROVÁ, M.- FOLK, R.: *Rozvíjení myšlení žáků při vyučování.* Praha: PF UK, 1999.
[2] BEHÚNOVÁ, V.: *Úvod do logiky pedagogického myslenia*. Prešov: PU, 1998.
[3] BIZÁM, G. – HERCZEG, J.: *Zaujímavá logika*. Bratislava: Alfa, 1982.
[4] CIRJAK, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh*. Prešov: Essox, 2000.
[5] GAHÉR, F.: *Logické hádanky, hlavolamy, paradoxy.* Bratislava: Iris, 1996.
[6] GAHÉR, F.: *Logika pre každého*. Bratislava: IRIS, 1998.
[7] JEDINÁK, D.: *Logická argumentácia už v prvých triedach základnej školy*. In: Induktívne a deduktívne prístupy v matematike – zborník z konferencie Trnavskej univerzity, Smolenice 2005.
[8] JELÍNEK, M.: *Logické prvky ve školské matematice*. Praha: SPN, 1981.
[9] KUŘINA, F.: *Logika a vyučování matematice na základní škole*. Matematika a fyzika ve škole, roč.4/1974), č.6(s.401-406) a č.7(s.497-507).
[10] KOWAL, S.: *Matematika pro volné chvíle*. Praha, SNTL, 1975, 1985.
[11] MATERNA, P.: *Viete logicky myslieť?* Bratislava: SPN, 1968.
[12] ZHOUF, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky*. Praha: Prometheus, 1997.

Adresa autora
Dušan Jedinák
Trnavská univerzita - Pedagogická fakulta
Priemyselná 4, P. O. BOX 9,
918 43 TRNAVA
Email: djedinak@truni.sk

Dušan Jedinák (1944), absolvoval MFF UK v Prahe, pôsobil ako učiteľ i riaditeľ Gymnázia v Topoľčanoch, bol školským inšpektorom ÚIC v Bratislave. Teraz sa venuje príprave budúcich učiteľov matematiky. Dlhodobo sa zaujíma o motiváciu a popularizáciu školskej matematiky. Publikuje príspevky z didaktiky i dejín matematiky.