KONŠTRUKCIA ZMYSLUPLNEJ MATEMATICKEJ KULTÚRY

Dušan JEDINÁK

Kľúčové slová: vyučovanie matematiky, filozofia matematiky.

1. Úvod

1.1 Podiel matematického rozumu

Odvtedy ako sme sa pozreli na svet očami matematiky, objavili sme veľké tajomstvo: prírodné modely ukazujú na podstatné princípy, podľa ktorých funguje celý vesmír (I. Stewart). Matematická kultúra ako podstatná a nezameniteľná zložka všeobecnej kultúry má za cieľ vypestovať zmysluplné chápanie okolitého sveta na základe matematického spôsobu myslenia, využitím abstrakcie a zovšeobecnenia. Pre rozvoj matematickej kultúry nie je dôležité množstvo poznaných faktov, ale ich správne pochopenie v podstatných súvislostiach. Kombinácia matematického uvažovania, predstavivosti a experimentu je najmocnejšou zbraňou človeka pri odhaľovaní príčinných súvislostí. Dlhodobý vývoj ľudskej civilizácie nás presviedča, že kultúra myslenia sa vytvára v živote spoločnosti, v prostredí práce a riešenia problémov, pri vymieňaní poznatkov a vysvetľovaní javov, vo vzťahu medzi skutočnosťou a jej opisom. Základným znakom myslenia je dôsledné, usporiadané, presné a všestranné hodnotiace uvažovanie. Tam, kde nastupuje logické usudzovanie, abstraktné zovšeobecňovanie a zdôvodňovanie faktov, tam sa "vkráda" matematika ako univerzálny prostriedok každej vedy, ako účinný nástroj poznávania skutočnosti. Vhodne štruktúrovaný jazyk rôznych matematických odvetví sa stal rečou moderných prírodovedných, technických i spoločenskovedných disciplín. Stal sa trvalou a nenahraditeľnou súčasťou ľudského myšlienkového zušľachťovania skoro v každej oblasti.

Školská matematika by mala zostať v prostredí všetkých našich vzdelávacích učilíšť zásadným vyučovacím predmetom charakterizujúcim tvorivý rozvoj ľudskej myšlienkovej kultúry i vedecko-technickej civilizácie. Z rôznorodých matematických disciplín majú prenikať už k žiackemu vedomiu účinné spôsoby a metódy univerzálnych myšlienkových postupov a ideí, ktoré odhaľujú nové prístupy ľudského poznávania (napr. aj vo vzťahu k nekonečnu). Už v škole požadujme aktívnu činnosť študentov na vytváraní prostredia pre samostatné pozorovanie, konštruktívne porozumenie a rozvoj logického myslenia. *Rozhodujúci vplyv na rozvoj matematickej kultúry majú stovky tzv. neznámych učiteľov na základných a stredných školách, ktorí v každodennej práci pripravujú budúcich študentov* (Š. Schwarz).

1.2 Podpora premýšľania

Neformálne matematické porozumenie je vždy prejavom vytrvalej myšlienkovej dôslednosti i ochoty prekonávať prekážky vo vnímaní a odhaľovaní súvislostí. Jednou z ciest, aby vedomosti zo školskej matematiky neboli iba formálne, je uplatňovanie zásady: **vhľad – porozumenie – použitie**. Ak majú byť matematické vedomosti užitočnou súčasťou ľudskej kultúry, tak majú zvýrazniť a rozvíjať samostatné a kritické myslenie, využívať abstraktné prístupy pri rôznej reprezentácii a odhaľovať rôznorodé hierarchizované štruktúry pojmov aj súvislostí medzi nimi. Matematický spôsob uvažovania rozvíja **poznávacie schopnosti** (analýza a porozumenie javov a vzťahov, abstrakcia, zovšeobecnenie, objavovanie súvislostí, rozvoj predstavivosti, tvorba pojmov, štruktúra poznatkov), **vyhraňuje postoje a významy** (formulácia myšlienok, príčinné vysvetľovanie, argumentácia, organizácia informácií, kritický prístup a poučenie sa aj z chýb), **zvýrazňuje komunikáciu** (nevyhnutnosť zdôvodňovania tvrdení, neverbálne a symbolické vyjadrovanie, logická argumentácia, diskusia a porovnávanie názorov).

Uveďme, s ohľadom na špecifické postupy vo vyučovaní školskej matematiky, charakteristické znaky a princípy tohto výchovno-vzdelávacieho prístupu:

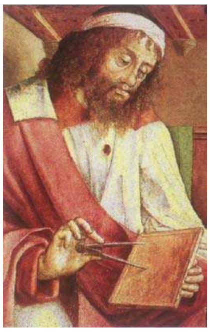
- Kladie sa dôraz predovšetkým na **učenie sa,** doplnené dialógom medzi žiakmi a učiteľom s cieľom hlbšieho systematického porozumenia.
- Vyžaduje a podporuje sa iniciatíva usmernenej zvedavosti, aktivita skúmania a odhaľovania súvislostí, samostatná myšlienková argumentácia učiacich sa.
- Rešpektujú sa motivačné postoje žiakov, ich učebné štýly, stratégie i podnetné návrhy na obsah i formu vyučovania.
- Zabezpečujú sa autentické matematické skúsenosti v kontexte reálnych životných situácií, riešenie problémových úloh na úrovni najbližšej zóny pochopenia, vytvára sa dostatočný časový priestor.
- Nezanedbáva sa spätná väzba, v diskusii sa odstraňujú vzniknuté rozpory, povzbudzuje sa k novým predstavám (hypotézam).

1.3 Záver úvodu

Pre ukážku spomínaného prístupu vo vyučované matematiky som pripravil päť zaujímavých podnetných učiteľských situácií (z dávnej histórie; z temného stredoveku; z nepraktického rozhovoru; s idealizmom v realite; s predstavivosťou odôvodnenia). Posúďte sami ich didaktickú užitočnosť.

2. Podnetné ukážky

2.1 To vedel už Euklides



Už od čias antických Grékov sa za **dokonalé čísla** považujú tie prirodzené čísla, pre ktoré platí, že súčet všetkých ich deliteľov sa rovná dvojnásobku daného čísla. Alebo tiež aj takto: Prirodzené číslo ***n*** je **dokonalé**, ak sa rovná súčtu všetkých svojich vlastných (t.j. menších ako ***n***) deliteľov. Napríklad: Číslo 6 (= 1 + 2 + 3) je dokonalé číslo; aj 28 (= 1 + 2 + 4 + 7 + 14) a 496 (preverte si to) sú dokonalé čísla. **Euklides** (asi 340 - 287 pred n. l.) v IX. knihe *Základov* v časti XXXVI dokázal: *Ak sú postupne od jednotky dané čísla v pomere 1:2, až sa ich súčet stane prvočíslom a ak sa tento súčet vynásobí posledným z týchto čísel, tak takto vzniknuté číslo bude dokonalé.* Naznačme si toto tvrdenie na príklade:

$$\underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + 16)}_{\mathbf{31}\ \text{je prvočíslo}}\cdot 16 = \mathbf{496}\ \ (= 1+2+4+8+16+31+62+124+248)\ \ \text{je dokonalé.}$$

Dokážeme túto vetu: Ak sú ***p*** aj $(\mathbf{2^p - 1})$ prvočísla, tak $\mathbf{2^{p-1}\cdot(2^p - 1)}$ je dokonalé číslo.

Nech ***p*** je prvočíslo. Ak je $(\mathbf{2^p - 1})$ tiež prvočíslo, tak delitelia čísla $\mathbf{2^{p-1}\cdot(2^p - 1)}$ sú čísla 1, 2, 4, 8, ..., 2^{p-1}, $(2^p - 1)$, $2\cdot(2^p - 1)$, $4\cdot(2^p - 1)$, $8\cdot(2^p - 1)$, ..., $2^{p-2}\cdot(2^p - 1)$.

Ak určíme súčet týchto všetkých deliteľov dostaneme

$$\underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{p-1})}_{(2^p - 1)} + \underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{p-2})}_{(2^{p-1} - 1)}\cdot(2^p - 1) = \quad \{\text{je to súčet geometrického radu}\}$$

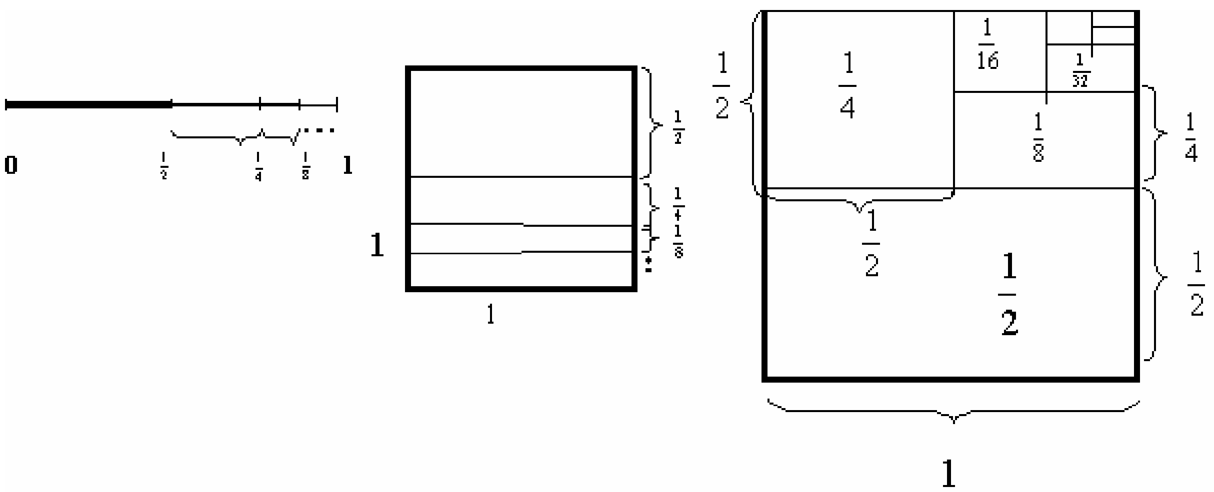
$= (2^p - 1) + (2^{p-1} - 1)\cdot(2^p - 1) = [1 + (2^{p-1} - 1)]\cdot(2^p - 1) = \mathbf{2^{p-1}\cdot(2^p - 1)}$, je splnená definícia dokonalého čísla.

Euklides poznal štyri dokonalé čísla: 6, 28, 496, 8128. Ďalšie dokonalé číslo (33 350 336) objavil asi **J. Müller-Regiomontanus** (1436 - 1476). **Leonhard Euler** (1707 - 1783) určil ďalšie tri dokonalé čísla a dokázal, že každé párne dokonalé číslo má tvar podľa Euklida $\mathbf{2^{p-1}\cdot(2^p - 1)}$, kde $\boldsymbol{p}$ aj $\mathbf{(2^p - 1)}$ sú prvočísla. Ani dodnes nevieme, či existuje nepárne dokonalé číslo, ani či je dokonalých čísel konečný alebo nekonečný počet.

2.2 Bádavý mních

Mikuláš z Oresmu (**Nicole Oresme**, asi 1323 – 1382) patril k prvým, ktorí sa nezľakli tajomstiev nekonečna. Spoznal, že môže existovať nekonečný rovinný útvar s konečným obsahom. Vo svojich úvahách obsiahol niekoľko hlbokých myšlienok matematiky premenných veličín, ktoré však museli počkať, pokiaľ sa neobjavil matematický aparát pre riešenie konkrétnych reálnych problémov fyziky a ďalších technických i prírodných vied. Prednášal na Collége de Navarre v Paríži (1348 – 1361), prekladal latinské texty do francúzštiny a komentoval ich. Vytváral novú francúzsku vedeckú terminológiu nielen v astronómii ale aj v geografii. V oblasti matematiky a mechaniky predvídal niektoré pojmy a metódy, ktoré sa uplatnili až v 16. a v 17. storočí. **Mikuláš z Oresmu** sa snažil o matematický popis pohybu, uvažoval o možnosti iných svetov aj o rotácii Zeme. V práci *O konfigurácii kvalít* používal geometrické vyjadrenie veličín a ich vzájomné súvislosti. Nad úsečkou znázorňujúcou čas zostrojil „čiaru intenzity pohybu“ a porovnával „formy o premennej šírke.“ V podstate sa jednalo o graf rýchlosti, kde obsah obrazca vyjadroval veľkosť dráhy.

Geometrickou interpretáciou vedel **Mikuláš z Oresmu** určovať aj súčet nekonečných radov. Ukázal, že $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$, pretože „pochopil obrázky“:

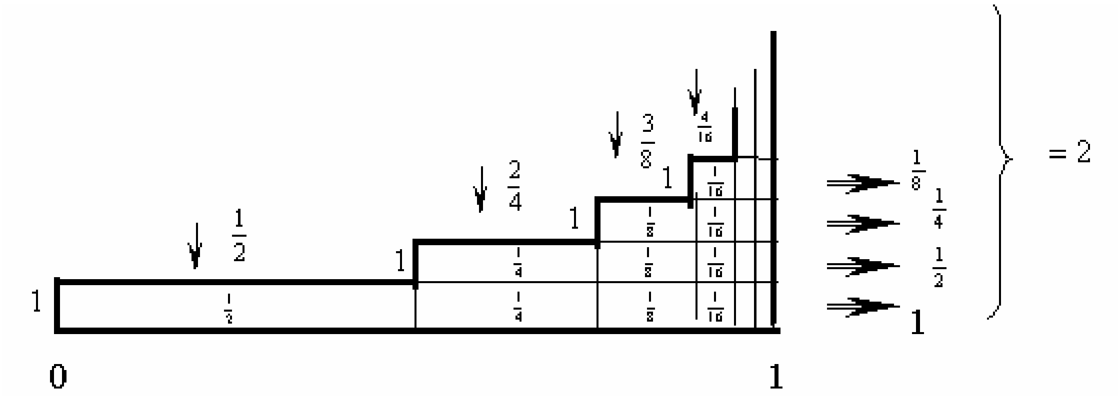


Vtipne predviedol, už v roku 1350, že harmonický rad $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ nemôže mať konečný súčet, lebo (v našom zápise)

$$1 + \underbrace{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{> \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{> \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \dots + \tfrac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots$$

a to znamená súčet blížiaci sa k nekonečnu.

Takýmto obrázkom



vedel určiť súčet $^1/_2 + {}^2/_4 + {}^3/_8 + {}^4/_{16} + \ldots = 2$.

2.3 Rozhovor dvoch matematikov

Dvaja matematici (***A***; ***B***) sa takto zhovárali:

A: *Súčin veku mojich troch synov je 36.*

B: *Táto informácia mi nestačí na určenie veku každého z nich.*

A: *Súčet veku mojich synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.*

B: *Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.*

A: *Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.*

B: *Ďakujem, to stačí, už poznám vek tvojich synov.*

Koľko rokov má každý zo spomínaných synov?

Koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?

Vek synov je kladné celé číslo.. Rozložme číslo 36 na súčin troch kladných celých čísel a zapíšme do tohto riadku hneď aj súčet týchto čísiel (súčet ich veku):

$1 \cdot 1 \cdot 36$	***38***	$1 \cdot 2 \cdot 18$	***21***	$1 \cdot 3 \cdot 12$	***16***	$1 \cdot 4 \cdot 9$	***14***
$1 \cdot 6 \cdot 6$	***13***	$2 \cdot 2 \cdot 9$	***13***	$2 \cdot 3 \cdot 6$	***11***	$3 \cdot 3 \cdot 4$	***10***

Teraz jasne vidíme, prečo ***B*** nemohol po druhej odpovedi určiť vek synov – na budove bolo 13 okien. Teda sú dve možnosti pre vek synov: buď 1, 6, 6 alebo 2, 2, 9. Matematik ***A*** v poslednej odpovedi (*najstarší* z mojich synov) naznačil, že najstarší jeho syn nie je z dvojičiek (mali by rovnaký vek). Teda jeho synovia majú vek dva, dva a deväť rokov.

2.4 S túžbou po harmónii

K pojmu harmónia

Harmónia znamená (z gréckeho *harma*) spojenie pevného s pohyblivým, súlad, súzvuk, súhra, zladenie, vyrovnanosť, súmernosť časti a celku, proporcionalita. Znamená to aj rovnaké číselné pomery (napríklad spájanie, význam i použitie akordov v hudobnej skladbe), výraz zákonitosti a miery vo svete, protiklad chaosu (organizovanosť), bezkonfliktná jednota doplňujúcich sa protikladov.

Z gréckych dejín

Pytagorovci, filozofické spoločenstvo a bratstvo nasledovníkov *Pytagora* (asi 582 - 497 pred n. l.), sa okrem iného zaoberali aj preniknutím do tajomstva čísiel a otázok harmónie, lebo *celé nebo je harmónia a číslo*. Možno ako prví v histórii začali chápať prirodzené čísla ako abstraktné entity, ktoré samé o sebe charakterizujú príčinný svet javov. Objavili harmonické postupnosti v témach hudobnej stupnice (oktáva: pomer 1:2 pri dĺžkach strún, kvinta 2:3, kvarta 3:4). Vnímali charakteristiku všetkých vecí a javov v povahe pomerov celých čísiel. Ale prišli až na to, že pomery prirodzených čísiel nevystačia ani na vyjadrenie uhlopriečky štvorca pomocou jeho strany. Odhalili, že $\sqrt{2}$ sa nedá vyjadriť ako podiel dvoch prirodzených čísiel. Vlastnou metódou prekonali svoje ilúzie. Odhalili, že základné sily vesmíru asi možno vyjadriť jazykom matematiky. Už *Archytas z Tarentu* (asi 428 - 365 pred n. l.) uvádzal niekoľko typov stredných veličín – priemerov a medzi nimi aj aritmetický, geometrický a **harmonický priemer**. Ak bola daná trojica kladných čísiel $a > b > c$, tak **harmonický priemer** bol daný ako $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$; z toho vyplýva, že $b = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$ (aj dnes to je **harmonický priemer** čísiel a, c; zadefinovaný tiež aj ako prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt a, c, teda $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$).

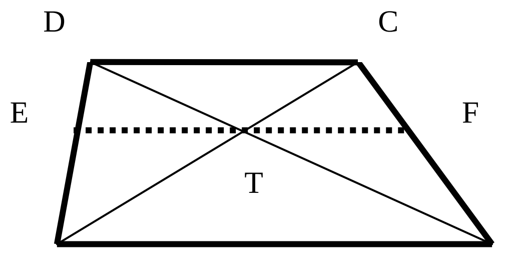
V dnešnej súčasnosti

Naozaj by ma zaujímalo s akou úspešnosťou vyriešia naši terajší žiaci úlohu: Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h a či vedia, že tam sa uplatnil **harmonický priemer**. Možno by sa nemalo vyskytovať v našich základných a stredných školách to, aby sa študenti nestretli s pojmom **harmónia**, ale ani to, aby nepoznali, čo nazývame **harmonický priemer** (**harmonický stred**). Rád im pripomínam, že ***harmonický rad*** je nekonečný rad, v ktorom každý jeho člen (okrem prvého) je harmonickým priemerom oboch svojich susedných členov, napr. rad, ktorého n-tý člen $a_n = \frac{1}{n}$, t.j. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$; tento rad je divergentný, jeho súčet je + ∞ (viete to dokázať?).

Uvidieť **harmonický priemer**

Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je geometrickým priemerom veľkostí oboch jeho základní.

Označme patričné body ako na obr. 1., kde $|AB| = a$, $|CD| = c$.



obr. 1

Trojuholníky ABT a CDT sú podobné (podľa vety *uu*; rovnobežky preťaté priečkou – striedavé uhly). Potom platí $|AT| : |TC| = a : c$, t.j. $|TC| = \frac{c}{a} \cdot |AT|$.

Trojuholníky *TFC* a *ABC* sú tiež podobné (podľa vety *uu*) s koeficientom podobnosti $\frac{|TC|}{|AC|} = \frac{|TF|}{|AB|}$. Teda môžeme vyjadriť $|TF| = \frac{|TC|}{|AC|} \cdot |AB|$,

t.j. $$|TF| = \frac{c}{a} \cdot \frac{|AT| \cdot |AB|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Podobne pre trojuholníky *TEA* a *CDA* s koeficientom podobnosti $\frac{|AT|}{|AC|} = \frac{|ET|}{|DC|}$ platí

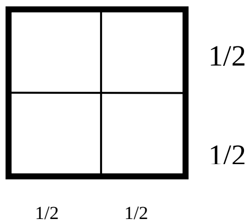
$$|ET| = \frac{c \cdot |AT|}{|AC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Potom platí $|EF| = |ET| + |TF| = 2 \cdot \frac{a \cdot c}{a + c} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$ a to je **harmonický priemer** a, c.

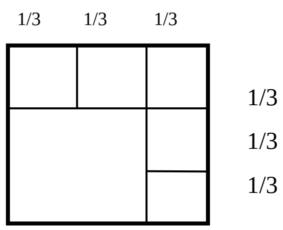
2.5 Rozdelenie štvorca na štvorce

Ukážte, že každý štvorec sa dá rozdeliť na n (celé $n \geq 6$) menších štvorcov.

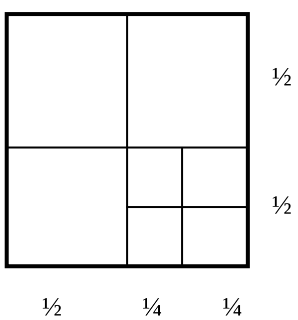
Nie je problém rozdeliť štvorec na štyri menšie štvorce (pozri obr. 1). Vieme rozdeliť štvorec na šesť menších štvorcov (pozri obr. 2). Vieme rozdeliť štvorec na sedem menších štvorcov (pozri obr. 3). Vieme rozdeliť štvorec aj na osem menších štvorcov (pozri obr. 4).



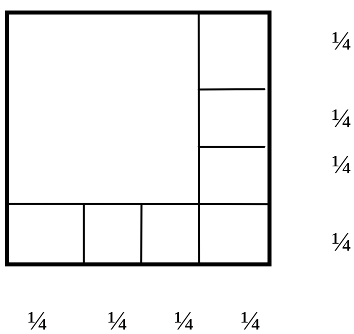
obr. 1



obr. 2



obr. 3



obr. 4

To znamená, že vieme rozdeliť daný štvorec aj na 9 menších štvorcov, lebo 6 + 3 = 9, t.j. jeden zo šiestich štvorcov rozdelíme na 4, teda spolu ich bude 5 + 4 = 9. Podobne pre $n = 10 = 7 + 3 = 6 + 4$, aj pre $n = 11 = 8 + 3 = 7 + 4$. Pre ďalšie n je konštrukcia zrejmá (opakuje sa postup rozdelením jedného malého štvorca na štyri ešte menšie a tak k doterajšiemu počtu rozdelených pridáme tri). Ak teda vieme rozdeliť štvorec na počet n pre tri za sebou idúce n a vždy aj na počet $n + 3$, tak vieme rozdeliť štvorec na n menších štvorcov pre všetky $n \geq 6$.

3. Záver

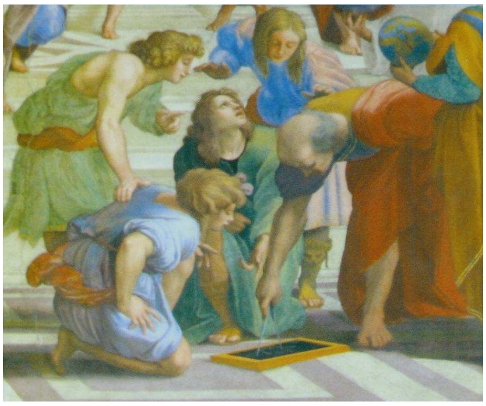
Podstatou školského vyučovania matematiky je neformálny záujem o správne uvažovanie v štruktúre základných poznatkov a dohodnutých postupov. Ochotu musia prejaviť obaja: učiteľ i jeho žiak. Charakteristikou ich zmysluplnej spolupráce sú: **zosúladená motivácia**, **otvorený dialóg**, **spontánne porozumenie** a **úspešná činnosť**. *Hlavne v matematike musíme viesť žiakov k tomu, aby sa v obvyklej reči vyhýbali slovám a frázam, ktoré nedávajú zmysel. Matematika nielen môže, ale aj musí pomáhať vytvárať u žiakov návyky na zreteľné, stručné, výrazné a logické vyjadrovanie. To im určite v živote pomôže účinnejšie odovzdávať svoje vedomosti, zručnosti a túžby do vedomia iných ľudí* (B.V. Gnedenko).

Štúdium školskej matematiky môže byť hlboký intelektuálny zážitok primeraný mentálnym schopnostiam a rozumovým skúsenostiam s ohľadom na vek i prostredie študentov. Trvalým dôsledným motivačným sprístupňovaním a didakticky zdôvodnenou myšlienkovou konštrukciou základných matematických vedomostí môžeme prispievať k zušľachťovaniu ľudských duší matematickou kultúrou.

4. Slovo po závere

4.1 Ponuka skúseností

Po mnohých rokoch vyučovania školskej matematiky možno treba zhrnúť skúsenosti. Určite ich skryjem do citátov. Prvý z posledných je tento: *Matematické myslenie je jednou zo schopností, ktoré majú všetky ľudské bytosti, rovnako ako schopnosť hovoriť a písať, počúvať alebo skladať hudbu, dívať sa a maľovať obrazy, veriť v kultúrne a morálne kódexy a podriaďovať sa im* (J. P. Aubin). Mnohé z toho, čo človek vie sa musel naučiť. Bolo to šťastie, ak stretol zodpovedného učiteľa. *Ten kto nevidí nič krásne alebo účinné na matematike, pravdepodobne nezapáli v iných pocit vnútorného nadšenia k tomuto predmetu* (J.S. Bruner). Možno, keby bolo viac skutočných učiteľov počtov a merby, nevytvorilo by sa mnoho odporu k matematickému premýšľaniu. *Predmet matematiky je tak závažný, že by sa nemalo zabúdať na žiadnu príležitosť, ako ho urobiť trochu zaujímavým* (B. Pascal). Učil som aj budúcich učiteľov matematiky. *Najdôležitejšie umenie učiteľa je, aby vzbudil radosť z tvorenia a poznávania* (Albert Einstein). Snažil som sa svojim nástupcom odkázať: *Nepýtajte sa, koľko matematiky sa môže dieťa naučiť. Pýtajte sa radšej, v akej miere môže matematika vo vzdelaní dieťaťa prispieť k jeho ľudskej dôstojnosti* (H. Freudenthal).



4.2 Podpisujem sa pod odpísané

- *Matematika je jedným z odborov prinášajúcich najväčšie intelektuálne uspokojenie... Zaoberať sa matematikou je skutočné potešenie spočívajúce v nachádzaní spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú a zjednodušujú* (W. P. Thurston).
- *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tu prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu* (G. Polya).
- *Keď uvažujem o matematickom poriadku, ktorý sa vo vnútri reality zjavuje, môj rozum ma núti povedať, že ten neznámy ukrytý za kozmom je prinajmenšom hypermatematickou inteligenciou, ktorá kalkuluje a ktorá je vzťahová, t. j. produkujúca vzťahy, a teda musí byť typom abstraktným a duchovným* (J. Guitton).

S pozdravom D.J.

Literatúra

[1] DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky*. Praha: Argo - Dokořán, 2002.

[2] FISCHER, R. - MALLE, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN, 1992.

[3] FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett, 1977.

[4] HEJNÝ, M. a kol.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: UK-PdF, 2004.

[5] HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.

[6] JEDINÁK, D.: *Dokážeme, že sa nedá*. ROZHLEDY M-F, roč. 82 (2007), č.1, s.54-56.

[7] JEDINÁK, D.: *Odvaha i rozvaha pre dokazovanie v školskej matematike.* M-F-I, roč.15/4, s.203-212.

[8] JEDINÁK, D.: *Percentá sú zradné čísla pomerné*. ROZHLEDY M-F, roč. 82 (2007), č.2, s.51-53.

[9] JEDINÁK, D.: *Vhodná predstava – cesta k úspechu (aj pri štúdiu matematiky).* MFI 14/5, s.263-268.

[10] JEDINÁK, D.: *Úlohy školskej matematiky, ktorých riešenie mám rád.* UČITEL M 14/1, s.51-58.

[11] KUDRIAVCEV, L. D.: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*. Bratislava: SPN, 1990.

[12] KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1990.

[13] KUŘINA, F.–PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.

[14] POLYA, G.: *Matematičeskoje otkrytije*. Moskva: Nauka, 1970.

[15] POLYA, G.: *Matematika i pravdopodobnyje rassuždenija*. Moskva: Nauka, 1975.

DUŠAN JEDINÁK
TRNAVSKÁ UNIVERZITA - PEDAGOGICKÁ FAKULTA
PRIEMYSELNÁ 4, 918 43 TRNAVA
MAIL@ DJEDINAK@TRUNI.SK, WWW.ERA.TOPINDEX.SK