Didakticko-motivačná výbava učiteľa matematiky

Dušan JEDINÁK, Trnavská univerzita v Trnave

Jednou z pozitívnych charakteristík úspešného učiteľa matematiky je aj jeho pripravenosť na improvizáciu (napr. na suplovaných vyučovacích hodinách, v mimovyučovacom čase, pri záujmovej činnosti a pod.). K tomu môže poslúžiť jeho ***didakticko-motivačná výbava*** – zvlášť pripravený súbor rôznorodých podnetov aj pre nečakané situácie. Učiteľ matematiky nemá ponúkať len údaje z predpísaných učebníc a zbierok úloh, ale aj iné motivačné informácie a popularizačné podnety, napr. aj výber titulov z popularizačnej, zábavnej a rekreačno-poučnej i historickej literatúry s matematickou tematikou alebo životopisné informácie o významných matematikoch a ich pozoruhodných dielach. Zodpovedný učiteľ by mal mať vždy „po ruke“ svoj typický širší súbor podnetov (uložený aj vo svojej ľudskej pamäti), úloh i príkladov, zaujímavých myšlienok a didaktických postupov, historických poznámok, praktických ukážok, aby presvedčoval o tom, že jeho pomer k matematickej kultúre je živený trvalým a hlbokým vzťahom pre pestrý svet informácií s jednoduchým, ale aj veľmi podnetným pozadím. Tieto ciele sleduje to, čo nazývame ***didakticko-motivačná výbava učiteľa matematiky***.

Málokto z učiteľov matematiky pochybuje o tom, že pre pedagogickú prácu sú potrebné nielen vhodné príklady a úlohy, ich didaktické spracovanie, motivačné podnety, ale aj pozoruhodné citáty, filozofické úvahy a historické poznámky. Ich účelový výber je určite rôznorodo pestrý. Spoločným menovateľom asi môže byť zámer motivačno-didaktický. Žiakom potrebujeme ukázať základné myšlienkové postupy charakteristické pre matematické myslenie, obsažnosť tém logickej argumentácie i žánrovú pestrosť spracúvanej problematiky. Každý učiteľ školskej matematiky má svoj „odborný obzor“. Postupné presahovanie tejto línie by si mal pravidelne pripravovať ďalším štúdiom podnetných zdrojov informácií.

Riešenie úloh ako ústredná činnosť

Základnou zložkou motivačno-didaktickej výbavy učiteľa matematiky je pestrý súbor úloh s pozoruhodným textom, s rôznou tematikou, postupne sa zvyšujúcou obťažnosťou a cieleným možným použitím vo zvolenej chvíli didaktického pôsobenia. Učiteľ matematiky v prvom rade na premyslených zadaniach príkladov a úloh, v postupoch ich riešenia a dokazovania správnosti, uplatňuje svoju metodickú spôsobilosť, didaktické zásady i praktické skúsenosti. Vhodne pripravené a v správnom čase uplatnené úlohy sú aj zdrojom myšlienkových podnetov a motivačných impulzov. Súbor ponúkaných úloh (napr. ukážka 1., 4.) a ich didakticko-motivačná úroveň sú pomerne dobrou charakteristikou kvality učiteľskej práce.

Súbor didakticko-motivačných úloh (ukážka 1.)

1. **Ako si zapamätať číslo π na 30 desatinných miest?**
   π = 3,141592653589793238462643383279. ..
   Mám, ó bože, ó dobrý, zapamätať si takýto čísel rad. Veľký slovútny Archimedes, pomáhaj trápenému, daj mu moc naspamäť znať krásne aj slávne síce, ale tak protivné nám, ach, číslice Ludolfove.
   (počet písmen v jednotlivých slovách je príslušná číslica v desatinnom vyjadrení π)

2. **Nečakané vyjadrenie – rovnica srdca:**
   Znázornite v ortonormálnej sústave súradníc binárnu reláciu
   $$y = \frac{2}{3}\left\{\frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2}\right\}$$

3. **Rozdelenie koristi – spravodliví zbojníci**:
   Ako si traja zbojníci rozdelia rôznorodú korisť, ak si navzájom nedôverujú a každý z nich je presvedčený, že dokáže korisť rozdeliť na rovnocenné časti.

4. **Rozhovor dvoch matematikov:**
   A: Súčin veku mojich troch synov je 36.
   B: Táto informácia nestačí na určenie veku každého z nich.
   A: Súčet veku synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.
   B: Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.
   A: Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.
   B: Ďakujem, to mi stačí. Už poznám vek tvojich synov.
   Koľko rokov má každý z matematických synov a koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?

5. **Štvorec iba kružidlom**
   Zostrojte všetky vrcholy štvorca ABCD, ale iba kružidlom, ak sú dané vrcholy A, B.

6. **Nežný cit a pravdepodobnosť:**
   Desať ľudí si náhodne sadne okolo okrúhleho stola. Aká je pravdepodobnosť, že určití dvaja ľudia budú sedieť vedľa seba?

7. **Čo je výhodnejšie pre pracujúcich?**
   Máte rozhodnúť, buď znížiť ceny výrobkov o 10% a nemeniť platy pracovníkov, alebo nemeniť ceny výrobkov a zvýšiť o 10% platy. Zdôvodnite, čo je výhodnejšie pre pracovníkov.

8. **Taký trojuholník neexistuje**
   Ukážte, že neexistuje trojuholník, ktorého výšky by mali veľkosť 1, 2, 3 (dĺžkových jednotiek).

9. **Aj taký existuje?**
   Dokážte, že v rovine existuje trojuholník, ktorého všetky výšky sú menšie než 1 cm a obsah trojuholníka je väčší ako milión cm^2.

10. **Záhada dvanástich dukátov**
    Medzi dvanástimi dukátmi je jeden falošný (nemá rovnakú hmotnosť ako ostatné). Stanovte postup akým nájdete tento falošný dukát najviac tromi váženiami na rovnoramenných váhach.

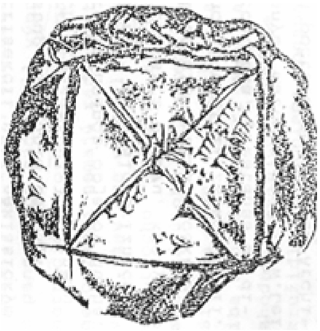
Postrehy význačných matematikov (ukážka 2.)

- *Najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet.* Platón
- *Filozofia sveta je obsiahnutá v grandióznej knihe otvorenej pre všetkých – myslím tým knihu prírody. Je napísaná rečou matematiky. Bez nej nemožno pochopiť ani jedno slovo, bez nej zostane iba márne krúženie v bludnom labyrinte... Dve pravdy si nikdy nemôžu odporovať.* G. Galilei
- *Príroda má v obľube jednoduchosť a jednotnosť.* J. Kepler
- *Úlohou vedy je vzďaľovať človeka od zla, usmerňovať jeho myseľ k väčšej dokonalosti.* M. Kopernik
- *Celá ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. Snažme sa preto, aby sme mysleli správne, v tom je princíp mravnosti... Nemožno popierať existenciu všetkého, čo nie je pochopiteľné.* B. Pascal
- *Z úvah o príkladoch je možné vytvoriť metódu.* R. Descartes
- *Ani jeden veľký objav sa nezrodil bez smelého odhadu... Ak môžeš udržať rozum nad vášňou, on a ostražitosť budú tvojimi najlepšími ochrancami.* I. Newton
- *Ak dáte vedľa seba dokonalé a nedokonalé, ľudia zaraz spoznajú rozdiel. Ak im dáte len nedokonalé, budú spokojní.* G. Leibniz
- *Matematiku už len preto je nutné študovať, že ona rozum do poriadku dáva.* M. V. Lomonosov
- *Najtvrdším orieškom pri riešení problémov je položiť si správnu otázku. Jediná cesta ako sa to dá naučiť je – skúšať to.* P. Halmos
- *Pravdivé nie je obmedzované nepravdivým, ale tým čo nič neznamená.* R. Thom
- *Práca matematikov mala vždy za cieľ priniesť nové poznatky užitočné pre inú ľudskú činnosť.* P. Vopěnka
- *Matematika dáva najčistejší a bezprostredný zážitok pravdy, v tom je jej hodnota pre všeobecné vzdelanie.* M. Laue
- *Disciplína vedca je zasvätenie pravde... Dôležité nie je víťazstvo, ale boj o poznanie... Najvyššie poslanie matematiky spočíva v tom, aby nachádzala skrytý poriadok v chaose, ktorý nás obklopuje.* N. Wiener
- *Protirečenie medzi všeobecným dobrom a individuálnym záujmom možno odstrániť iba vtedy, keď záujmom indivídua je všeobecné dobro.* A.N Whitehead
- *Ani najvyššia svetská moc, ani bohatstvo – len vláda vedy pretrvá.* Tycho Brahe
- *Nikdy nemáme definitívne pravdu. Môžeme si byť istí iba tým, že sa mýlime.* R. Feynman
- *Šťastie záleží v tom, aby tvoje životné dielo bolo potrebné ľuďom.* A. D. Alexandrov
- *To najdôležitejšie v živote je hrať sa. A je šťastím, ak človek zapojí do hry svoj mozog.* E. Rubik
- *V tejto dobe je pravda tak zatemnená a lož tak zavedená, že pravdu môže poznať iba ten, kto ju miluje.* B. Pascal
- *Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru, alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta.* H. Weyl
- *Milujem matematiku nielen preto, že je možné jej použitie v technike, ale aj preto, že je krásna, že do nej človek vložil svoju rozkoš z hry a že matematiky je schopná aj tej najvyššej hry a umožňuje nám zmocňovať sa nekonečna. Má čo povedať o nekonečne a o ideách. Má neuzavretú povahu ľudského tvorenia.* R. Péterová

Súbor historických poznámok (ukážka 3.)

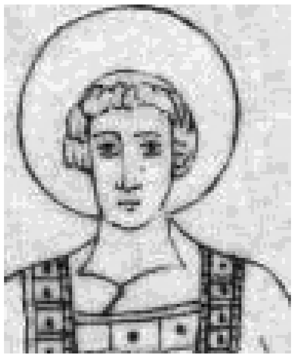
Medzi Eufratom a Tigrisom

Medzi najstaršie kultúrne oblasti sveta patrí územie medzi riekami Eufrat a Tigris. Sumeri už približne 3300 rokov pred n. l. poznali slabičné písmo (asi 400 znakov). Z obdobia okolo



2800 rokov pred n. l. sa zachovala sumerská tabuľa s číselnými znakmi. Vieme, že klinovým písmom zapisovali čísla v šesťdesiatkovej sústave. V starovekom Babylóne zaznamenali do obrázku štvorca so stranou 30 aj dĺžku jeho uhlopriečky ako $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$. Hodnotu $\sqrt{2}$ uvádzali ako $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$, to znamená presnosť až na 5 desatinných miest. Mezopotámska matematika sa dostala do základov nielen číselných symbolov, ale aj do babylonskej šesťdesiatkovej a neskôr i do desiatkovej číselnej sústavy. Nečakanou zaujímavosťou je aj fakt, že bola nájdená tabuľka s hodnotami pätnástich pytagorovských trojuholníkov. Viac než tisíc rokov pred Pytagorom bola známa tzv. Pytagorova veta.

Stredoveká zbierka úloh



Ani v „temnom“ stredoveku nebola matematika mŕtva. Na dvore Karola Veľkého v Aachene okolo roku 775 sa používala jedna z prvých zbierok zaujímavých úloh z matematiky s podnetným názvom ***Úlohy na cibrenie umu mladých***. Jej autorom bol učiteľ, filozof i básnik **Alcuin z Yorku** (asi 735 – 804, pôvodným keltským menom Alh-win, t. j. priateľ chrámu). Už v tejto učebnici sa vyskytuje známa úloha o pltníkovi, vlku, koze a kapuste. Skúste zdokonaliť svoje myslenia vyriešením úlohy: Ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci. Už vo svojej dobe vzdelanec **Alcuin** vedel: „*Rozumne sa pýtať, znamená vyučovať*.“

Štvorec protikladov

Carihradský mních a filozof **Michael Sellos**, žijúci v 11. storočí, navrhol (pred ním podobnú schému používal aj vzdelaný rímsky rečník L.A. Apuleius v druhom storočí) usporiadať všeobecný kladný výrok [$\forall x \in M ; \varphi(x)$], všeobecný záporný výrok [$\forall x \in M; \varphi'(x)$], čiastočný kladný výrok [$\exists x \in M ; \varphi(x)$] a čiastočný záporný výrok [$\exists x \in M ; \varphi'(x)$] do štvorcovej schémy a vyznačiť ich logické vzťahy:

$\forall x \in M ; \varphi(x)$ ⟵ *protiviace sa* ⟶ $\forall x \in M; \varphi'(x)$

nadradené *podradené* *protirečivé* *nadradené* *podradené*

$\exists x \in M ; \varphi(x)$ ⟵ *podprotiviace sa* ⟶ $\exists x \in M ; \varphi'(x)$

protirečivé (logicky protikladné, sporné, kontradiktórne, negácia, opak; jeden je pravdivý – druhý nepravdivý)
protiviace sa (kontrárne; nemôžu byť obidva pravdivé, ale môžu byť obidva nepravdivé)
podprotiviace sa (subkontrárne; môžu byť obidva pravdivé, nemôžu byť obidva nepravdivé)
podradenosť, nadradenosť vzhľadom na pravdivosť (subsumcia; pre neprázdnu M z pravdivosti nadradeného výroku vyplýva pravdivosť podradeného výroku, z nepravdivosti podradeného výroku vyplýva nepravdivosť nadradeného výroku)

Matematici z Trnavskej univerzity (1635-1777)

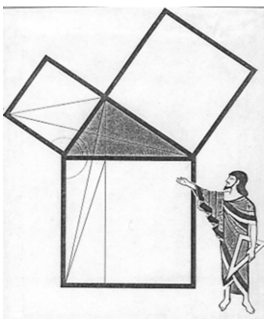
Uvedieme mená tých, o ktorých vieme, že vydali nejakú matematickú prácu, alebo úspešne prednášali súdobú matematiku. **Henrich Berzeviczi** (1652-1713) vydal (1687) učebnicu praktickej matematiky, **Ján Dubovský** (1654-1710) spolu s **F. Székelym** (1657-1715) zostavili prvé goniometrické tabuľky v Uhorsku (1694). **Ján Ivančič** (1722-1784) a **Anton Revický** (1713-1781) vydali (1752-1753) prvé vysokoškolské kompendium *Krátky teoretický a praktický základ všeobecnej matematiky*. **J.K. Horváth** (1753-1800) vydal dvojdielne *Základy matematiky* (1772/73), kde uviedol aj poznatky o kužeľosečkách. Diferenciálnymi rovnicami sa zaoberal **Pavol Makó** (1724-1793), matematiku prednášal aj astronóm **F. Weiss** (1717-1785), trnavský rodák, od roku 1770 univerzitný profesor, dekan filozofickej fakulty (1770-1772) i rektor univerzity (1775).

Nikdy nebude prvočíslom

Koľko bolo žien úspešných vo „veľkej“ matematike? Prvou ženou, ktorá získala cenu Parížskej akadémie za vypracovanie matematickej teórie pružnosti dosiek bola **Sophie Germainová** (1776 – 1831). Pracovala aj v teórii čísel. Tam jednoducho ukázala: *Pre každé prirodzené číslo n > 1 platí: číslo* (n^4+4) *je číslo zložené* (to znamená, že ak je n > 1 nie je n^4+4 nikdy prvočíslo). Pozrite sa na vtipný dôkaz:
$n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^2 = (n^2+2)^2-(2n)^2 = (n^2+2+2n).(n^2+2-2n)$.
Ani jeden zo súčiniteľov sa pre n > 1 nerovná jednej, to znamená, že n^4+4 má dvoch rôznych deliteľov, ktoré sa nerovnajú číslu samému ani jednotke. Teda je to číslo zložené.

Výchovné podnety z dávnej histórie

Významní myslitelia starovekého Grécka, s filozofickým založením a nadaním i pre matematiku, nám zanechali odkazy aj pre výchovné pôsobenie:



Táles (asi 624 – 547 pred n. l.): *Nerobme to, čo odsudzujeme u druhých... Neber od otca, čo je zlé... Smutná je nečinnosť, škodlivá nemiernosť, obťažná nevzdelanosť... Nebohatni nesprávnym spôsobom... Nestačí mať čisté ruky, treba mať ducha čistého... Najťažšia vec – poznať sám seba. Najľahšia vec – radiť druhým.*

Pytagoras (asi 570 – 496 pred n. l.): *Boh dal človeku dve ruky, aby ho neobťažoval s každou maličkosťou... Úlohou výchovy je prebudiť v človeku génia... Pravé a dokonalé priateľstvo znamená spojiť veľa vecí a tiel v jedno srdce a jediného ducha... Najkratšie odpovede – áno a nie – vyžadujú najdlhšie rozmýšľanie... Z každého polena Merkura nevyrežeš... Rob veľké veci bez sľubov... Mlč, alebo povedz niečo, čo je lepšie ako mlčať.*

Platón (asi 427 – 347 pred n. l.): *Najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet... Matematika ponúka skvelý prostriedok pre objavenie právd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné... Počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk... Aký kto je, také dielo vytvára.*

Aristoteles (asi 384 – 322 pred n. l.): *Umenie je nejaký tvorivý stav, spojený so správnym úsudkom... Skutočná božská činnosť, ktorá sa vyznačuje najvyššou blaženosťou, je asi teoretická činnosť... Iba málo ľudí vie, že šťastie vyplýva z osobnej dokonalosti.*

Euklides (asi 340 – 287 pred n. l.): *Ani pre kráľov neexistuje ku geometrii zvláštna cesta... Ak chceš objaviť to, čo nikto nevidí a nevie, musíš klásť múdre otázky.*

Zaujímavé riešenia vtipných úloh (ukážka 4.)

Čarovný trik ako kúzelník
Úloha: Napíšte si svoje trojciferné číslo. Urobte z neho ďalšie číslo s obráteným poradím číslic. Odčítajte menšie z týchto čísel od väčšieho. Z výsledku mi povedzte cifru na mieste jednotiek. Poviem vám celý výsledok.

Riešenie: Skúsme to: 537, 735

$$\begin{array}{r} 735 \\ -\ 537 \\ \hline 198 \end{array} \qquad \text{poviete } 8.$$

Ja si predstavím 99 . x = 8, teda $x = 2$, váš výsledok bol 198. V čom je podstata?
$100a + 10b + c – 100c – 10b – a = 99a – 99c = 99.(a - c)$

Výsledok odčítania trojciferných tzv. reverzných čísel je vždy deliteľný 99.
Tento fakt využijeme na určenie rozdielu $(a – c)$ a teda aj celého výsledku..

Vynájsť sa aj z mála
Úloha: V znázornenom zápise súčinu dvoch kladných celých čísel stanovte nezapísané číslice (sú naznačené bodkami):

$$\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet \\ \times\ \bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet \\ 3275 \\ \bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$$

Riešenie: Musíme vychádzať z toho mála, čo vidíme a z toho, čo o násobení vieme. Ak rozložíme číslo 3275 na súčin prvočísiel dostaneme $3275 = 5^2 . 131$, teda aby sme dostali toto číslo ako súčin trojciferného a jednociferného čísla treba 655 . 5. Potom násobenec bude 655 a druhá cifra násobiteľa 5. Pretože tretí čiastočný súčin je trojciferný, tak prvá číslica násobiteľa musí byť iba 1. Aby prvý čiastočný súčin bol štvorciferný a celkový súčin iba päťciferný, tak posledná cifra násobiteľa môže byť len 2 .

Naznačený súčin je

```
         6 5 5
       x 1 5 2
  --------------------
       1 3 1 0
     3 2 7 5
     6 5 5
  ________________
     9 9 5 6 0
```

Zázračné krátenie zlomkov

Úloha: Nájdite všetky zlomky s dvojciferným čitateľom a dvojciferným menovateľom, v ktorých sa cifry neopakujú, ale umožňujú „zázračné krátenie“, napr.:

$$\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$$

Riešenie: Aj keď sa takéto krátenie v žiadnej škole všeobecne neuznáva, existujú prípady, že to niekedy „bude dobre“. Hľadáme zlomky tvaru:

$$\frac{10a+b}{10b+c}$$

kde a, b, c $\in$ {0, 1, 2 .... 9}, ale $a \neq b$, $b \neq c$.

Potom by „zázračným krátením“ malo platiť:

$$\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c} \qquad\qquad c = \frac{10a.b}{9a+b}$$

Po postupnej voľbe $a = 1$, $b = 2$ atď. dostaneme, že vyhovujú:

$a = 1$ $b = 6$ $c = 4$
$a = 1$ $b = 9$ $c = 5$
$a = 2$ $b = 6$ $c = 5$
$a = 4$ $b = 9$ $c = 8$

Toto „zázračné krátenie“ možno uplatniť len na zlomkoch:

$$\frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}.$$

Tanečný záznam svedomitých dievčat

Úloha: Na tanečnom večierku bolo 20 mladých ľudí (chlapci a dievčatá). Mária tancovala so siedmimi chlapcami, Oľga s ôsmimi, Viera s deviatimi, atď. Posledná Helena tancovala so všetkými chlapcami. Koľko chlapcov bolo na večierku?

Riešenie:
Na prvý pohľad sa zdá, že zadanie úlohy je akési zmätočné. Nevieme mená všetkých dievčat ani ich počet. Označme si počet dievčat $\boldsymbol{x}$.
Poznáme iba počet tanečníkov s jednotlivými svedomitými dievčatami:

$$\boldsymbol{x}\left\{\begin{array}{l} \text{M .... 7 ch} \\ \text{O .... 8 ch} \\ \text{V .... 9 ch} \\ \quad .\qquad . \\ \quad .\qquad . \\ \quad .\qquad . \\ \quad .\qquad . \\ \text{H ....}\ \boldsymbol{y}\ \text{ch} \quad (\boldsymbol{y}\ \text{je počet všetkých chlapcov}) \end{array}\right.$$

Teda $\boldsymbol{x}$ - té dievča tancovalo s $\boldsymbol{y}$ chlapcami,

$\boldsymbol{x}$ - 1 .... $\boldsymbol{y} - 1$ ...

$\boldsymbol{x}$ - 2 .... $\boldsymbol{y}$ - 2 ...

.

.

prvé dievča tancovalo s $\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} - 1)$ chlapcami.

Svedomitým úsudkom vidíme, že $\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} - 1) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} + 1 = 7$.
Vyriešime sústavu rovníc $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = 6 \ \wedge \ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 20$.
Dostaneme $\boldsymbol{y} = 13$ a $\boldsymbol{x} = 7$.
Na večierku bolo 7 dievčat a 13 chlapcov.
Svedomitý postup pri zoznámení sa so zadaním úlohy nám priniesol požadovaný výsledok.

Hľadajte a nájdete ...
Úloha: Aký je mocniteľ čísla 7, ak rozložíme číslo 10000! (desaťtisíc faktoriál) na súčin prvočíselných činiteľov?

Riešenie:
10000! = 1 . 2 . 3 .... 9999 . 10 000

exponent nad 7 je taký, aký je počet sedmičiek v tom súčine:

1.2 ... 7 ... 14(=2.7) ... 21(=3.7) .... 49(=7.7) ... 98(=2.7.7) .... 343(=7.7.7) ...

... 686(=2.7.7.7) .... 2401(=7.7.7.7) ... 4802(=2.7.7.7.7) ....

Koľko krát je v tom súčine číslo 7 ?

za každý násobok jednej 7:	10 000 : 7 = 1 428
za každý násobok 49 (kde je o jednu 7 viac):	10 000 : 49 = 204
za každý násobok 343 (kde je ďalšia 7 naviac):	10 000 : 343 = 29
za každý násobok 2401 (kde je zase ďalšia 7 naviac):	10 000 : 2401 = 4
teda spolu	1665

V spomínanom súčine je číslo 7^{1665}, teda mocniteľ čísla 7 je 1665.

Stručné spomienky na matematikov (ukážka 5.)

Obdivoval usporiadanie čísel do magických štvorcov. V geometrii vytušil nové možnosti využívaním súradníc. Vybadal spojenie medzi úlohami na určovanie dotyčníc. Bol právnikom, matematiku sledoval ako záľubu. **Pierre Fermat** (20.8.1601 - 12. 1. 1665), francúzsky sudca, do dejín matematiky sa zapísal svojou domnienkou, ktorá prežila bez dôkazu celé storočia (Fermatovu vetu dokázal A. Wiles, 1993 - 94). Napĺňa sa jeho predpoveď: "*Mnohí budú prichádzať a odchádzať, ale veda sa bude stále obohacovať*." Jeho korešpondencia s B. Pascalom sa zapísala do základov teórie pravdepodobnosti.

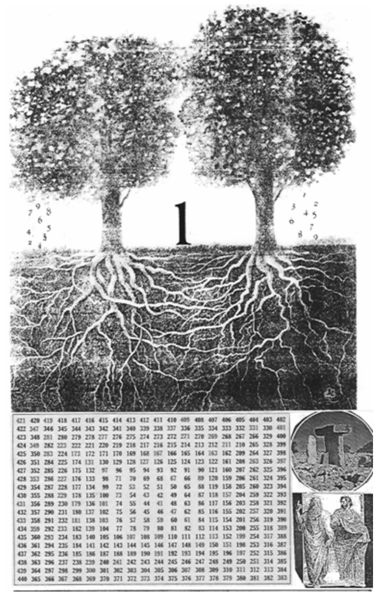
Považoval štúdium prírody za najplodnejší prameň matematických objavov. "*Matematika je povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života.*" Dokázal vetu o počte reálnych koreňov algebraickej rovnice medzi danými hodnotami premennej. **Jean Baptiste Fourier** (21. 3. 1768 - 16. 5. 1830), francúzsky matematik a fyzik, sa stal zakladateľom a priekopníkom matematickej fyziky. Podal teóriu vedenia tepla, ukázal novú metódu riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc. Jeho špeciálne transformácie našli použitie pri štúdiu kmitov, pri riešení problémov oznamovacej techniky, optiky a kybernetiky.

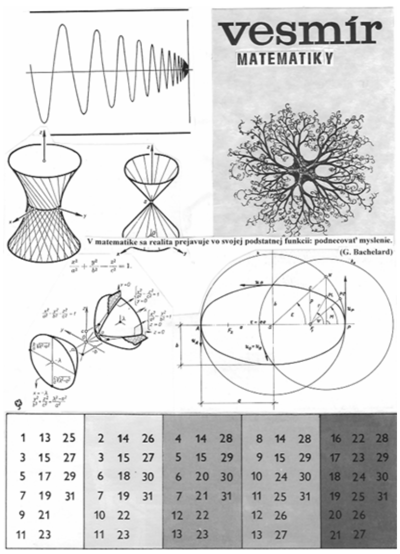
Prvá profesorka matematiky v Európe prednášala na univerzite v Štokholme (od 1884). "*Medzi všetkými vedami, ktoré odkrývajú ľudstvu cestu k poznaniu zákonov prírody, najmohutnejšia a najvznešenejšia je matematika.*“ **Sofia Vasiljevna Kovalevská** (15. 1. 1850 - 10. 2. 1891), ruská matematička, vytvorila znamenité štúdie v teórii diferenciálnych rovníc a analytickej mechanike. Získala Bordinovu cenu, ocenenia parížskej Akadémie vied, Švédskej akadémie i členstvo v Akadémii vied v Petrohrade. Vynikala matematickou erudíciou, literárnym talentom a ľudskou odvahou. Zvýraznila právo sebauplatnenia žien v oblastiach dovtedy pre nich nedostupných.

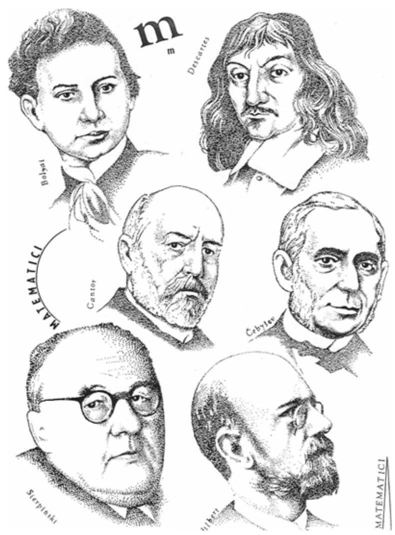
Prispel k aritmetizácii matematiky, podal aritmetickú definíciu iracionálnych čísel. **Karl Weierstrass** (31. 10. 1815 - 19. 2. 1897), nemecký matematik, dobudoval základy matematickej analýzy, vytvoril presne zdôvodnenú teóriu eliptických funkcií, ovplyvnil teóriu analytických funkcií i variačný počet. Vedel, že matematika nesmie strácať kontakt s ďalšími vedami. "*Nemožno byť skutočným matematikom a nebyť trochu aj básnikom.*"

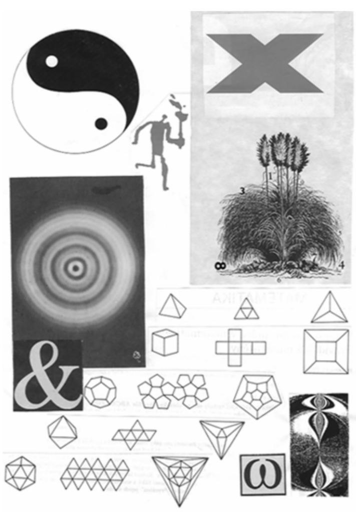
„Vo svojej práci som sa vždy pokúšal zjednotiť pravdu s krásou.“ Vyštudoval u D. Hilberta v Nemecku, pôsobil v Princetone (USA). **Hermann Weyl** (9. 11. 1885 - 8. 12. 1955), matematik, fyzik i filozof, rozvinul teóriu spojitých grúp i aditívnu teóriu čísel. Zaslúžil sa o modernú interpretáciu časopriestoru a hmoty. "*Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka.*"

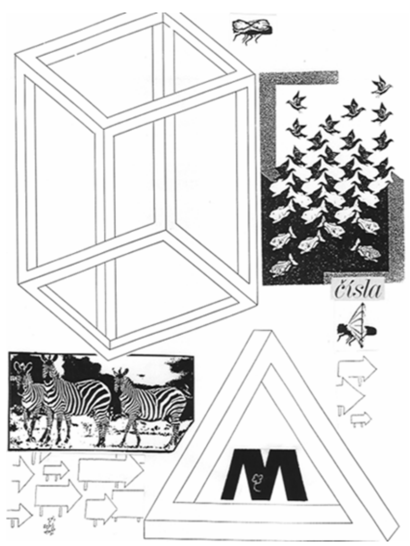
Popularizujúca grafika - skutočné i abstraktné podobenky (ukážka 6.)











Metódy rozvíjania študijnej motivácie (ukážka 7.)

Naznačme si tie princípy a postupy zvyšovania motivácie, ako protipríklady pre demotivačné činitele učenia sa (autoritatívny štýl vyučovania, memorovanie, strnulosť a fádnosť vyučovacích metód, málo tvorivosti, aktivity a originality), ktoré môžu byť užitočné pri vyučovaní školskej matematiky:

1. Vyučovanie hrou a dramatizácia aj matematickej činnosti, živé a názorné vyučovanie, rozmanitosť a zmena rytmu.
2. Uplatňovanie princípu sebavyjadrovania žiaka a jeho zodpovednosti za výsledky matematickej práce, zvýraznenie jeho individuality.
3. Zaujímavosť ponúkaných matematických úloh, možnosť primeraného súťaženia a uplatnenia skúseností, vhodné ocenenie úspechu, vytváranie prostredia medziľudskej spolupráce.
4. Problémové alebo programované učenie (tvorba hypotéz, aktivita, spätná väzba, vlastné tempo).
5. Tvorivosť, autentický pocit sebarealizácie, oddelenie produkcie od hodnotenia, cielený rozvoj predstavivosti a zmysluplných asociácií, sústredenosť na prácu a zapojenie celej osobnosti.
6. Individuálny prístup k žiakom, skupinové vyučovanie, rozvíjanie citového vzťahu aj k problémom, rozvoj hodnotiaceho myslenia, hierarchia cieľov, aktuálnosť a užitočnosť získaných poznatkov.
7. Samostatné aktívne individuálne využívanie informačných zdrojov a fondov, uplatňovanie zmysluplnosti a širšieho významu vzdelanosti i matematickej kultúry.

Aj vo vyučovaní školskej matematiky majú nezanedbateľnú úlohu osvedčení motivačné postupy všeobecného didakticko-pedagogického pôsobenia: názornosť, problémový prístup, individuálna starostlivosť, zadanie primerane obtiažnych úloh pre ďalšie samostatné štúdium, pravidelné opakovanie.

Štúdium školskej matematiky má vzbudiť, usmerniť a udržať záujem a schopnosť používať matematický spôsob myslenia a argumentácie v rôznych životných situáciách každodenného ľudského života. Hans Freudenthal, didaktik matematiky, navrhoval. „*Umiestnite žiakov do takých situácií, kde budú vo vzťahu s takými reálnymi javmi, ktorých organizačným princípom je určitá matematická štruktúra*.“ Matematická kultúra ľudstva patrí k nenahraditeľnému civilizačnému odkazu nielen prežitia ľudského rodu, ale aj jeho vedecko-technického a technologického rozvoja do informačno-počítačovej spoločnosti 21. storočia. Od dôb Platóna (asi 427– 347 pred n. l.) až dodnes prinášajú rozvinuté matematické disciplíny aj podnety duchovno-filozofické a metodologické. „*Matematika je ako sila ľudského ducha povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života*“ (J.B. Fourier, 1768-1830). Matematické myslenie je pre nás impulzom aj pre cestu k nekonečnu (potencionálnemu i aktuálnemu).

Výber z didakticko-popularizačnej literatúry (ukážka 8.)

Jednou z možností, ako môžu učitelia "počtov a merby" získať popularizačné a motivačné impulzy, je poznanie vhodných informácií z príslušnej literatúry. Ponúkam stručný prehľad slovenskej a českej knižnej produkcie z posledného obdobia (po roku 1996) :

ANDĚL, J.: *Matematika náhody*. Praha: Matfyzpress, 2003.
BARROW, J.D.: *Pí na nebesích* (*O počítaní, myšlení a bytí*). Praha: Mladá fronta, 2000.
BECKMANN, P.: *Historie čísla π*. Praha: Academia, 1998.
CRYAN, D. a kol.: *Logika*. Praha: Portál, 2003.
DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky*. Praha: Argo a Dokořán, 2002.
FREGE, G.: *Základy aritmetiky* (*Logicko-matematické skúmanie pojmu čísla*). Bratislava: Veda, 2001.
GAHÉR, F.: *Logika pre každého*. Bratislava: IRIS, 1998.
GÖDEL, K.: *Filosofické eseje*. Praha: Oikoymenh, 1999.
HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě , škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.
HEJNÝ, M. – MICHALCOVÁ, A.: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava: MC, 2001.
KARFÍKOVÁ, L.- ŠÍR, Z.: *Číslo a jeho symbolika od antiky po renesanci*. Brno: CDK, 2003.
KOPKA, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad L.: UJEP, 1999.
KUŘINA, F.: *Deset geometrických transformací*. Praha: Prometheus, 2002.
KVASZ, L.: *O revolúciách vo vede a ruptúrach v jazyku vedy*. Bratislava: UK, 1998.
MATOUŠEK, J. – NEŠETŘIL, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Praha: Karolinum, 2000.
NAGEL, E. – NEWMAN, J.R.: *Gödelův důkaz*. Brno: VUTIUM, 2003.
NEMOGA, K. – RIEČAN, B.: *Matematika v b mol*. Bratislava: Veda, 1999.
PAPPASOVÁ, T.: *Potešenie z matematiky*. Bratislava: Nebojsa, 1997.
PENROSE, R.: *Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl*. Praha: Mladá fronta, 1999.
PUNČOCHÁŘ, M.: *Nedaleko nekonečna*. Praha: Academia, 2004.
REKTORYS, K.: *Co je a k čemu je vyšší matematika*. Praha: Academia, 2001.
SINGH, S.: *Velká Fermatova věta*. Praha: Academia, 2000.
SMULLYAN, R.: *Navěky nerozhodnuto*. Praha: Academia, 2003.
SMULLYAN, R.: *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy*. Praha: Portál, 2004.
TUGENDHAT, E. – WOLFOVÁ, V.: *Logicko-sémantická propedeutika*. Praha: Rezek, 1997.
QUINE, W. V.: *Od stimulu k vědě*. Praha: Filozofia, 2002.
VOPĚNKA, P.: *Podivuhodný květ českého baroka*. Praha: Karolinum, 1998.
VOPĚNKA, P.: *Uhelný kámen evropské vzdělanosti a moci* (Souborné vydání rozprav o geometrii). Praha: Práh, 2000.
VOPĚNKA, P.: *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*. Praha: Práh, 2004.
ZASTÁVKA, Z.: *Vše, co není zakázano, se nesmí* (*O logice formální i neformální*). Praha: Radix, 1998.

Odporúčam zodpovedným učiteľom matematiky, aby si spracúvali svoju osobnú motivačno-didaktickú výbavu a práve ňou charakterizovali svoj spôsob práce, zameranie pedagogickej činnosti a zvýrazňovali ponúkané priority. Čas strávený pri výbere podnetných zložiek pestrej a rôznorodej motivačno-didaktickej výbavy určite nebude zbytočný, zúžitkuje sa v plnohodnotnej informačnej komunikácii so študentmi.

Dušan Jedinák