VYRIEŠENÉ V ROKU 2018...

Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999:
12345678910111213 ... 997998999.
Stanovte číslicu, ktorá je na 2018. mieste od začiatku.

Riešenie:
Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest.
Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest.
Trojciferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2700 miest.
Hľadané 2018. miesto je 1829. miesto (2018 mínus 189) medzi trojcifernými číslami.
Na 1829 miest sa zmestí (1829 : 3) 609 trojciferných čísel a ešte dve cifry.
609. trojica cifier v postupnosti 100101102... je číslo 708 (lebo 100 je prvá trojica, 101 je druhá trojica a teda číslo 708 je 609. trojica) za ním nasleduje číslo **7**09, teda číslica na 2018. mieste je **0**.

Stanovte najmenšie prirodzené číslo,
ktorého ciferný súčet je 2018.

Riešenie:
Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať aj čo najmenší rád, t. j. počet cifier a teda čo najviac číslic 9.
Pretože 2018 : 9 = 224 + 2, hľadané číslo bude **2999 ... 9** (224 deviatok).

Stanovte zvyšok po delení čísla 10^{2018} číslom 15.

Riešenie:
Vieme, že $10^{2018} = \underbrace{100...000}_{\text{2018 núl}} = \underbrace{99 ... 99}_{\text{2017 deviatok}}0 + 10.$

Číslo 99... 990 (je tam 2017 deviatok) je deliteľné 3 aj 5, teda aj 15, a preto číslo 10^{2018} = 100...000 = (99 ... 990 + 10) má po delení číslom 15 zvyšok **10**.

Encyklopédia má očíslovaných 2018 strán
(prirodzené čísla od 1 do 2018 vrátane).
Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica **8**.

Riešenie:
Predstavme si čísla od 1 do 2018 napísané za sebou:
1 2 3 ... **8** ... 10... 1**8** ... 2**8** ... 3**8** ... **8**0 **8**1 ... **8**00 **8**01 ... 1**8**00 ... 200**8** ... 201**8**
Určíme počet číslic 8 na miestach jednotiek. V každej desiatke (od začiatku) napísaných čísel je na mieste jednotiek jedna **8**, celých desiatok je medzi 2018

číslami práve 201, a ešte jedna za číslo 2018, teda počet cifier **8** na miestach jednotiek je 202.
Na mieste desiatok je cifra **8** v stovke čísel 10 krát (**8**0, **8**1, ..., **8**9). V postupnosti 2018 čísel je stoviek 20. To znamená spolu 200 číslic **8** na mieste desiatok.
Na mieste stoviek je v tisícke čísel cifra **8** v číslach **8**00, **8**01,..., **8**99, teda 100 krát.
V postupnosti 2018 čísel sú dve tisícky, teda na miestach stoviek je 200 osmičiek.
Spolu je číslic **8** zrejme 202 + 200 + 200 = 602.
Na stránkach očíslovaných od 1 do 2018 vrátane je použitá cifra **8** práve **602** krát.

Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2018} má ciferný súčet 3.

Riešenie:
Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2018} má najviac 2 018 cifier.
Teda s práve jednou číslicou (3) je ich 2 018 (3, 30, 300, ... $3\cdot10^{2017}$).
Ak tam bude dvojica číslic 1 a 2, možností je C_2 (2018)
a za dvojicu 2 a 1 rovnako veľa.
Spolu je to 2· C_2 (2018) = 2018 · 2017 = 4 070 306
Ak tam budú práve tri jednotky, môžeme ich dávať na 2018 políčok,
teda počet možností je C_3 (2018) = (2018·2017·2016)/6 = 1 367 622 816
Spolu všetkých požadovaných možností teda je
2018 + 4070306 + 1367622816 = **1 371 695 140**.

Vieme, že $s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots (-1)^{n-1} \cdot n$.
Stanovte $s_{2017} + s_{2018}$.

Riešenie:
Vidíme, že $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_3 = 2$, $s_4 = -2$, $s_5 = 3$, $s_6 = -3$, ...
to môžeme zapísať aj takto: $s_{2k-1} = k$ *a* $s_{2k} = -k$, pre k z množiny prirodzených čísel.
Teda $s_{2017} = s_{2\cdot1009-1} = 1009$ a $s_{2018} = s_{2\cdot1009} = -1009$
potom $s_{2017} + s_{2018} = 1009 + (-1009) =$ **0**.

Stanovte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{2015\cdot2016}+\frac{1}{2016\cdot2017}+\frac{1}{2017\cdot2018}$$

Riešenie:
Jednotlivé časti výrazu možno upraviť takto:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)+\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)=$$

To po zlúčení znamená $1-\frac{1}{2018}=\frac{2017}{2018}$; teda približne **0,9995044598612488**

Stanovte hodnotu výrazu
$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots - 2015 - 2016 + 2017 + 2018.$

Riešenie:
Vidíme, že v danom výraze sa „situácia“ opakuje po štyroch členoch

$$\underbrace{1 + 2 - 3 - 4}_{-\ 4} + \underbrace{5 + 6 - 7 - 8}_{-\ 4} \ \dots \ + \underbrace{2013 + 2014 - 2015 - 2016}_{-\ 4} + 2017 + 2018;$$

to ale znamená, že súčet každej takejto štvorice je (– 4) (mínus štyri).
Celý naznačený výraz má 504 takýchto štvoríc a k tomu ešte súčet 2017 + 2018
Hodnota spomínaného výrazu je $504 \cdot (-4) + 4035 = -2016 + 4035 =$ **2019.**

Stanovte všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$,
pre ktoré platí $x \cdot y \cdot z + 3 = 2018$.

Riešenie:
$x \cdot y \cdot z + 3 = 2018$ po úprave znamená $x \cdot y \cdot z = 2015$.
Rozklad čísla 2015 na prvočísla je $5 \cdot 13 \cdot 31$.
Teda do úvahy prichádzajú trojice **1, 5, 403; 1, 13, 155; 1, 31, 65; 5, 13, 31.**

Stanovte posledné dve cifry čísla 3^{2018}
zapísaného v desiatkovej sústave.

Riešenie:
Posledné dve cifry čísla 3^n závisia od posledných dvoch číslic čísla 3^{n-1}.
Vyjadrime závislosť n a *posledných cifier* čísla 3^n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	**18**	19	20
3^n	01	03	09	27	81	43	29	87	61	83	49	47	41	23	69	07	21	63	**89**	67	01

Vidíme, že *perióda pre opakovanie* dvojice cifier je 20.

Platí $3^{2018} = 3^{20 \cdot 100} \cdot 3^{18}$. Na konci prvého činiteľa je 01 a na konci druhého 89.
Teda v súčine je na konci 89. Posledné dve cifry čísla 3^{2018} sú **89.**

Stanovte poslednú cifru desatinného zápisu
čísla ($\mathbf{2018^{2018}} + \mathbf{18}$)

Riešenie:
Perióda pre opakovanie posledných číslic mocnín 8 je štyri (8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, ...).
Teda číslo $2018^{2018} = 2018^{4 \cdot 504 + 2}$ má na konci poslednú cifru súčinu cifier 6 a 4, teda 4.
Ak k tomu pripočítame 18, tak poslednou požadovanou cifrou je **2**.

(vybral a zostavil *Dušan Jedinák*)