M úlohy (vyriešené) pre rok 2017

Úloha:

Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2017.

Riešenie:

Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom **čo najmenšie**, musí mať **čo najviac číslic 9**. Pretože $2017 = 224 \cdot 9 + 1$, hľadané číslo je **199 .... 9** (jednotka a za ňou 224 krát číslica 9).

Úloha:

Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999:
12345678910111213 ... 997998999.
Aká číslica je na 2017. mieste od začiatku?

Riešenie:

Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest.
Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest.
Trojciferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2700 miest.
Hľadané 2017. miesto je 1828. (2017 mínus 189) miesto medzi trojcifernými číslami.
Na 1828 miest sa zmestí (1828 : 3) 609 úplných trojciferných čísel a ešte jedna cifra.
609. trojica cifier v postupnosti 100101102... je číslo 708 (lebo 100 je prvá trojica,101 je druhá trojica a teda 708 je 609. trojica), teda číslica na 2017. mieste je **7** (7 je cifra z nasledujúceho čísla 709).

Úloha:

Zápis čísla K v desiatkovej sústave sa skladá z 2017 deviatok (999 ... 999). Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2.

Riešenie:

Môžeme napísať, že $K = 10^{2017} - 1$ (to číslo je vytvorené z 2017 deviatok za sebou).
Potom $K^2 = (10^{2017} - 1)^2 = 10^{4034} - 2 \cdot 10^{2017} + 1$. Ak to v náznaku rozpíšeme, je to takto:

1000 ... 000 ... 000 (4034 núl vedľa seba)
– 2 000 ... 000 (2017 núl vedľa seba)

---

9 ... 98 000 ... 000 (je tam 2016 deviatok, jedna 8, a 2017 núl vedľa seba)
teda K^2 obsahuje **2016** deviatok.

Úloha:

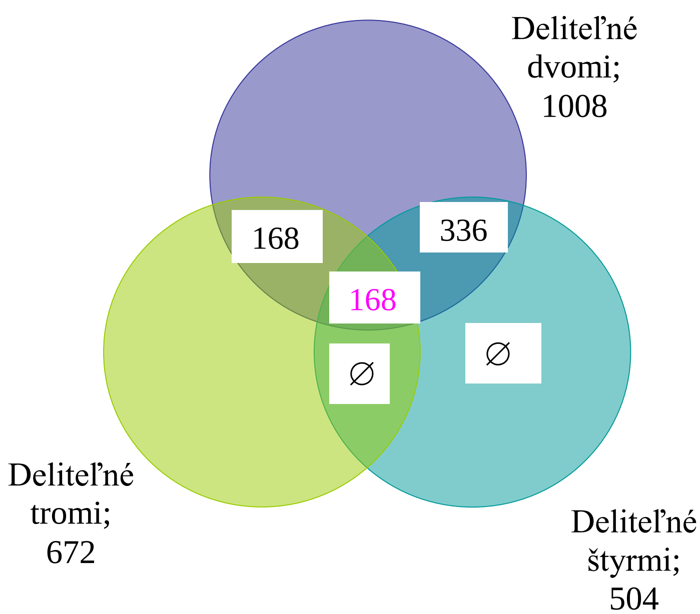
Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 2017 (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených **práve** dvomi značkami.

Riešenie:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ... 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017

z nich všetkých deliteľných dvomi je 1008;
z nich všetkých deliteľných tromi je 672;
z nich všetkých deliteľných štyrmi je 504;

čísel deliteľných dvomi a zároveň štyrmi je 504
(čísla deliteľné štyrmi sú deliteľné aj dvomi);
čísel deliteľných dvomi a zároveň tromi (teda deliteľných šiestimi) je 336;
čísel deliteľných tromi a zároveň štyrmi (teda deliteľných dvanástimi) je 168;
čísel deliteľných dvomi a tromi a zároveň štyrmi (deliteľných dvanástimi) je 168;



Práve dvomi značkami bude označených **504** čísel (168 + 336).

Úloha:

Encyklopédia má očíslovaných 2017 strán (prirodzené čísla od 1 do 2017 vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica **7**.

Riešenie:

Predstavme si čísla od 1 do 2017 napísané pod sebou:

1
2
.
7
.
10
11
.
1**7**
.
2**7**
.
70
71
.
100
101
.
10**7**
.
700
701
.
1001
1002
.
100**7**
.
1**777**
.
2001
2002
.
200**7**
.
201**7**

Určíme počet číslic **7** na miestach jednotiek. V každej desiatke (od začiatku) napísaných čísel je na mieste jednotiek jedna **7**, desiatok je medzi 2017 číslami práve 201, a ešte jedna za číslo 201**7** teda počet **7** na miestach jednotiek je 202.
Na mieste desiatok je **7** v stovke čísel 10 krát (**7**0, **7**1, ..., **7**9). V postupnosti 2017 čísel je stoviek 20. To znamená spolu 200 číslic **7** na mieste desiatok.
Na mieste stoviek je v tisícke čísel cifra **7** v číslach **7**00, **7**01,..., **7**99, teda 100 krát.
V postupnosti 2017 čísel sú dve tisícky, teda na miestach stoviek je 200 sedmičiek.

Spolu je číslic **7** zrejme 202 + 200 + 200 = 602.
Na stránkach očíslovaných od 1 do 2017 vrátane je použitá cifra **7** práve 602 krát.

Úloha:
Nájdite rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice $x \cdot y \cdot z + 3 =$ **2017**.
Riešenie:
Pretože 2017 – 3 = 2014 = 2·19·53, tak ak zvolíme $x = 1$, vyberieme ešte jedno číslo z množiny {2, 19, 53}, možností sú 3, a tretím číslom bude súčin zostávajúcich čísel z tejto množiny. Ak zvolíme $x = 2$, tak ďalšie čísla budú $y = 19$ a $z = 53$. Sú teda spolu štyri trojice prirodzených čísel pre požadované riešenie úlohy:
1, 2, 1007; 1, 19,106; 1, 38, 53; 2, 19, 53.

Úloha:
Nájdite rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice $x \cdot y \cdot z + 4 =$ **2017**.
Riešenie:
Pretože 2017 – 4 = 2013 = 3 · 11 · 61, tak ak zvolíme $x = 1$, potrebujeme vybrať ešte **dve čísla** z množiny {3, 11, 61}, tých možností je $C_2(3) = 3$, a tretím číslom bude súčin zostávajúcich čísel z tej množiny. Ak zvolíme $x = 3$, tak ďalšie čísla budú $y = 11$ a $z = 61$. Sú teda spolu štyri trojice prirodzených čísel pre požadované riešenie úlohy:
1, 3, 671; 1, 11, 183; 1, 33, 61; 3, 11, 61.

Úloha:
Stanovte zvyšok po delení čísla 10^{2017} číslom 15.
Riešenie:
Vieme, že $10^{2017} = \underbrace{100...000}_{2017 \text{ núl}} = \underbrace{99 ... 990}_{2016 \text{ deviatok}} + 10.$

Číslo 99... 990 (je tam 2016 deviatok) je deliteľné 3 aj 5, teda aj 15, a preto číslo 10^{2017} = 100...000 =(99 ... 990 + 10) má po delení číslom 15 zvyšok **10**.

Úloha:
Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x < y < z < t$ je riešením rovnice $x \cdot y \cdot z \cdot t + 15 =$ **2017**.
Riešenie:
Má teda platiť $x \cdot y \cdot z \cdot t = 2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ (rozklad čísla 2002 na prvočísla).
Teda, ak zvolíme $x = 1$, vyberieme ešte **dve čísla** z množiny {2, 7, 11, 13},

tých možností je C_2 (4) = **6**, a štvrtým číslom bude súčin zostávajúcich čísel z tej množiny. Ak zvolíme $x = 2$, tak ďalšie čísla budú $y = 7$, $z = 11$ a $t = 13$, teda je to už siedma možnosť.
Spomínanej úlohe vyhovuje **sedem možností** pre požadované usporiadané štvorice.

Úloha:
Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než $\mathbf{10^{2017}}$ má ciferný súčet 3.
Riešenie:
Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2017} má najviac 2 017 cifier.

Teda s práve jednou číslicou (3) je ich 2 017 (3, 30, 300, ... $3 \cdot 10^{2016}$).

Ak tam bude dvojica 1; 2 možností je C_2 (2017) a za dvojicu 2; 1 rovnako veľa.
Spolu je to $2 \cdot C_2$ (2017) = 2017 · 2016 = 4 066 272

Ak tam budú práve tri jednotky, môžeme ich dávať na 2017 políčok, teda počet možností je C_3 (2017) = (2017·2016·2016)/6 = 1 365 589 680.

Spolu všetkých požadovaných možností teda je
2017 + 4 066 272 + 1 365 589 680 = 1 369 657 969.

Úloha:
Vieme, že $s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots (-1)^{n-1} \cdot n$.
Stanovte $s_{2016} + s_{2017}$.
Riešenie:
Vidíme, že $s_1 = 1$, $s_2 = - 1$, $s_3 = 2$, $s_4 = -2$, $s_5 = 3$, $s_6 = - 3$, ...
to môžeme zapísať aj takto: $s_{2k-1} = k$ a $s_{2k} = - k$, pre k z množiny prirodzených čísel.
Teda $s_{2016} = s_{2\cdot 1008} = - 1008$ a $s_{2017} = s_{2\cdot 1009-1} = 1009$;
potom $s_{2016} + s_{2017} = -1008 + 1009 = 1$.

Úloha:
Stanovte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2015\cdot 2016}+\frac{1}{2016\cdot 2017}=$$

Riešenie:
Jednotlivé časti výrazu možno upraviť takto:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)+\left(\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)=$$

To po zlúčení znamená $1-\frac{1}{2017}=\frac{2016}{2017}$; teda približne **0,999504214179.**