M-úlohy (vyriešené) pre rok 2016

Úloha:

Stanovte *súčet* všetkých *prirodzených deliteľov* čísla **2016**, ktorí nie sú deliteľní šiestimi.

Riešenie:

Všetkých prirodzených deliteľov čísla 2016 je $6\cdot 3\cdot 2 = 36$, pretože $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.
Tých, ktoré nie sú deliteľné šiestimi je 16:
1; 7; 3; 21; 9; 63; 2; 14; 4; 28; 8; 56; 16; 112; 32; 224. Ich súčet je **600**.

Úloha:

Číslo A = 111…11 (**2016** číslic **1** bezprostredne za sebou).
Stanovte súčet číslic súčinu 2016·A.

Riešenie:

$2016\cdot A = 2016\cdot 111\ldots11 = 2\cdot(111\ldots11)\cdot 1000 + 1\cdot(111\ldots11)\cdot 10 + 6\cdot(111\ldots11)\cdot 1 =$

$222\ldots22000 + 111\ldots110 + 666\ldots66 =$

222…22000	2019 cifier
+ 111…110	2017 cifier
+ 66…666	2016 cifier

223999…99776	2019 cifier, z nich je 2013 cifier 9.

Teda ciferný súčet čísla 2016·A je **18144**.

Úloha:

Vieme, že $s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots (-1)^{n-1}\cdot n$.
Stanovte $s_{2015} + s_{2016}$.

Riešenie:

Vidíme, že $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_3 = 2$, $s_4 = -2$, $s_5 = 3$, $s_6 = -3$, … to môžeme zapísať aj takto:
$s_{2k-1} = k$ a $s_{2k} = -k$, pre k z množiny prirodzených čísel. Teda $s_{2015} = s_{2\cdot 1008-1} = 1008$
a $s_{2016} = s_{2\cdot 1008} = -1008$; potom $s_{2015} + s_{2016} = 1008 - 1008 = 0$.

Úloha:

Stanovte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2014\cdot 2015}+\frac{1}{2015\cdot 2016}=$$

Riešenie:

Jednotlivé časti výrazu možno upraviť takto:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right)+\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)=$$

To po zlúčení znamená $1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}$; teda približne **0,9995039682539683**.

Úloha:

Stanovte hodnotu výrazu

$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \ldots + 2013 + 2014 - 2015 - \mathbf{2016}$.

Riešenie:

Vidíme, že v danom výraze sa „situácia“ opakuje po štyroch členoch

$$\underbrace{1 + 2 - 3 - 4}_{-\ 4} + \underbrace{5 + 6 - 7 - 8}_{-\ 4} + 9 + 10 - \ \ldots \ \underbrace{+ 2013 + 2014 - 2015 - 2016}_{-\ 4},$$

to ale znamená, že súčet každej takejto štvorice je (– 4) (mínus štyri).
Celý naznačený výraz má 504 takýchto štvoríc.
Hodnota spomínaného výrazu je 504 · (−4) = **– 2016**.

Úloha:

Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2016} má ciferný súčet 3.

Riešenie:

Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2016} má najviac 2 016 cifier.
Teda s práve jednou číslicou (3) je ich 2 016 (3, 30, 300, ... $3\cdot 10^{2015}$).
Ak tam bude dvojica číslic 1 a 2, možností je C_2 (2016) a za dvojicu 2 a 1 rovnako veľa.
Spolu je to 2· C_2 (2016) = 2016 · 2015 = 4062240
Ak tam budú práve tri jednotky, môžeme ich dávať na 2016 políčok,
teda počet možností je C_3 (2016) = (2016·2015·2014)/6 = 1363558560
Spolu všetkých požadovaných možností teda je 2016 + 4062240 + 1363558560 =
1367622816

Úloha:

Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2016} má ciferný súčet 2.

Riešenie:

A. Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2016} má najviac 2016 cifier.
Jednociferným prirodzeným číslom s požadovaným ciferným súčtom je iba **2**.
Dvojcifernými prirodzenými číslami s požadovaným ciferným súčtom sú iba **11**, **20**.
Trojcifernými prirodzenými číslami s požadovaným ciferným súčtom sú **101**, **110**, **200**.
Štvorcifernými prirodzenými číslami s požadovaným ciferným súčtom sú **1001**, **1010**, **1100**, **2000**.
Všeobecne: n-ciferných prirodzených čísel zostavených z dvoch jednotiek je $(n-1)$, pretože 1□□□ ... □ a tých □, kde môže prísť ešte jedna 1 je práve $(n-1)$. K tomu sa pridá ešte možnosť 2 □□□ ... □. Spolu je pre n-ciferné číslo teda práve n možností.
Všetkých možností je 1 + 2 + 3 + ... + 2015 + 2016 = [(1 + 2016)] · 1008 = **2033136**.

B. Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2016} má najviac 2016 cifier.
S požadovanou vlastnosťou a s jednou číslicou (2) je ich teda 2016 (2, 20, 200,...).
Ak tam budú práve dve jednotky, môžeme ich dávať na 2016 políčok, teda počet možností je C_2 (2016) = (2016·2015)/2 = 2031120. Spolu všetkých požadovaných možností je 2016 + 2031120 = **2033136**.