VYRIEŠENÉ PRE ROK 2015

Stanovte najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2015.

Riešenie:

Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať aj čo najmenší rád, t. j. počet cifier a teda čo najviac číslic 9.
Pretože 2015 : 9 = 223 + 8, hľadané číslo bude 8999...9 (223 deviatok).

Stanovte, aká číslica bude na 2015. mieste od začiatku, ak postupne zapisujeme za sebou prirodzené čísla od 1: 123456789101112131415...

Riešenie:

Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest.
Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest.
Trojciferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2700 miest.
Hľadané 2015. miesto je 1826. (2015 mínus 189) miesto medzi trojcifernými číslami.
Na 1826 miest sa zmestí (1826 : 3) 608 trojciferných čísel a ešte dve cifry.
608. trojica cifier v postupnosti 100101102... je číslo 707 (lebo 100 je prvá trojica, 101 je druhá trojica a teda číslo 707 je 608. trojica) za ním nasleduje číslo 708, teda číslica na 2015. mieste je **0**.

Stanovte všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, pre ktoré platí $x \cdot y \cdot z = 2015$.

Riešenie:

Rozklad čísla 2015 na prvočísla je $5 \cdot 13 \cdot 31$.
Teda do úvahy prichádzajú trojice 1, 5, 403; 1, 13, 155; 1, 31, 65; 5, 13, 31;

Stanovte zvyšok po delení čísla 10^{2015} číslom 15.

Riešenie:

Vieme, že $10^{2015} = \underbrace{100...000}_{2015 \text{ núl}} = \underbrace{99 ... 990}_{2014 \text{ deviatok}} + 10$.

Číslo 99... 990 (je tam 2014 deviatok) je deliteľné 3 aj 5, teda aj 15, a preto číslo $10^{2015} = 100 ... 000 = (99 ... 990 + 10)$ má po delení číslom 15 zvyšok **10**.

Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2015} má ciferný súčet 3.

Riešenie:

Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2015} má najviac 2 015 cifier.
Teda s práve jednou číslicou (3) je ich 2 015 (3, 30, 300, ... $3 \cdot 10^{2014}$).
Ak tam bude dvojica číslic 1 a 2, možností je C_2 (2015) a za dvojicu 2 a 1 rovnako veľa.
Spolu je to $2 \cdot C_2 (2015) = 2015 \cdot 2014 = 4\,058\,210$
Ak tam budú práve tri jednotky, môžeme ich dávať na 2015 políčok, teda počet možností je $C_3 (2015) = (2015 \cdot 2014 \cdot 2013)/6 = 1\,361\,529\,455$
Spolu všetkých požadovaných možností teda je 2015 + 4 058 210 +1 361 529 455 = **1 365 589 680**.

Stanovte, koľkokrát sa v encyklopédii, ktorá má očíslovaných 2015 strán (prirodzené čísla od 1 do 2015 vrátane), vyskytuje číslica 5.

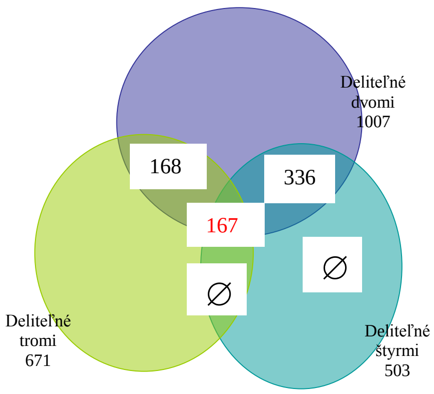
Riešenie:

Predstavme si čísla od 1 do 2015 napísané pod sebou:
Určíme počet číslic **5** na miestach jednotiek.
V každej desiatke (od začiatku) napísaných čísel je na mieste jednotiek jedna **5**;
desiatok je medzi 2015 číslami práve 201, tam je počet **5** práve 201 a ešte jedna **5** za číslo 201**5**, teda počet **5** na miestach jednotiek je 202.
Na mieste desiatok je **5** v stovke čísel 10 krát (**5**0, **5**1, ..., **5**9).
V postupnosti 2015 čísel je stoviek 20. To znamená spolu 200 číslic **5** na mieste desiatok.
Na mieste stoviek je v tisícke čísel cifra **5** v číslach **5**00, **5**01,..., **5**99, teda 100 krát. V postupnosti 2015 čísel sú dve tisícky, teda na miestach stoviek je 200 pätiek.
Spolu je číslic **5** zrejme 202 + 200 + 200 = 602.
Na stránkach očíslovaných od 1 do 2015 vrátane je cifra 5 použitá práve **602** krát.

Na tabuli sú napísané všetky čísla od 1 do 2015 (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi. Stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.

Riešenie:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ... 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015
z nich všetkých deliteľných dvomi je 1007;
z nich všetkých deliteľných tromi je 671;
z nich všetkých deliteľných štyrmi je 503;
čísel deliteľných dvomi aj štyrmi (čísla deliteľné štyrmi sú deliteľné aj dvomi) je 503
čísel deliteľných dvomi a zároveň tromi (teda deliteľných šiestimi) je 335;
čísel deliteľných tromi a zároveň štyrmi (teda deliteľných dvanástimi) je 167;
čísel deliteľných dvomi a tromi a zároveň štyrmi (deliteľných dvanástimi) je 167;



Práve dvomi značkami bude označených 5**04** čísel (168 + 336).

(dmj)