

Čím môže byť školská matematika?

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

Úvod

Matematická idea vznikla z potreby rozumu vybudovať model sveta, ktorý nás obklopuje... Aká je filozofia matematiky, také je aj vyučovanie matematiky. Tieto myšlienky, ktoré vyslovil francúzsky matematik **René Thom** (1923 - 2002), nositeľ Fieldsovej medaily (1958), nás podnecujú k tomu, aby sme sa ako učitelia „počtov a merby“ vážnejšie zamysleli a aspoň sami pred sebou vyjadrili svoju "filozofiu matematiky", to rozhodujúce, čo chceme ako šíritelia matematickej kultúry svojou pedagogicko-didaktickou prácou ponúkať, čím chceme ovplyvniť rozvíjajúci sa um i cit študentov, ich duchovný obzor, svet myšlienkových pojmov a zmysluplných abstrakcií, plnohodnotných presvedčení i nebojácnych rozvážnych skutkov.

Čím je pre nás matematika?

Vieme, že neexistuje úplná vedecká definícia matematiky. *Matematika je zároveň umenie i veda, je to eklektická zmes úžitku a tvorby, empirizmu a intuície* (J. Ewing). *Matematika je viac-menej systematický spôsob objavovania pravidiel a štruktúr, ktoré sa skrývajú za nejakým pozorovaným vzorom alebo pravidelnosťou* (I. Stewart). *Matematika je symbolický univerzálny jazyk, umožňujúci popis rôzneho obsahu, vyjadrujúci presné a jasné myslenie, smerujúce k riešeniu najrozličnejších problémov* (Ž. Krygovská). *Matematika je ako sila ľudského ducha povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života* (J. B. Fourier). *Matematika je učiteľkou presného i poctivého myslenia a vedie k triezvemu, ale pravdivému životu* (B. Bydžovský). Vždy sa však potešíme slovám nemeckého matematika W. Fuchsa: *Matematika je široká nádherná krajina otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť*. Zdá sa nám, že takto možno výstižne vyjadriť podstatu tejto vedy, spôsobov argumentovania, ktoré zvyčajne zdôrazňujú úlohu ľudského uvažovania a premýšľania, možnosť pochopenia hlavne kvantitatívnych javov tohto sveta našim rozumom.

Od dávna k nedávnu

Matematiku môžeme chápať ako všeobecnú metódu umožňujúcu spoznať to, čo sa dotýka systému, poriadku, miery, nezávisle od jednotlivých predmetov. Už **Platón** (asi 427– 347 pred n. l.) chápal matematiku ako výraz najhlbšej podstaty sveta, ako pravdu o nemennej povahe vecí. **Aristoteles** (384-322 pred n. l.) hovoril, že *matematika pozoruje veci, nevnímajúc zmyslové, zaujímajúc sa o vlastnosti množstva a súvislosti*. Starovekí Gréci (**Táles**, **Euklides**, **Pytagoras**, **Archimedes**) odhalili systematickosť premýšľajúceho rozumu a ľudského citu v hľadaní pravdy, krásy a dobra. Vytušili v číselných vzťahoch univerzálny základ pre výklad sveta, usmernenie pre hľadanie pravdivého popisu

prírodných javov. Pytagorovci študovali štyri matémy: aritmetiku (náuka o číslach), harmóniu (teória hudby), geometriu (náuka o rozpriestranosti objektov a ich meraní), astronómiu (náuka o pohybe hviezd). Odvtedy patrí ku kultúre myslenia spresňovať definície používaných pojmov, zdôvodňovať úsudky, dokazovať odvodené výroky. Z matematiky sa stal nástroj ľudského umu pre správne a presné myslenie, pre zmocňovanie sa významných faktov a odvodzovanie významných výsledkov. Zdanlivý svet matematiky vymodeloval myšlienkové procesy pre celú modernú vedu. *Za tisícročia svojej existencie matematika vytvorila obdivuhodnú kultúru myslenia i abstraktný jazyk, ktorý umožňuje jednotne popísať aj veľmi rozdielne procesy* (N.N. Moisejev).

Aj dávna i súčasná doba ukazuje matematiku ako vyhľadávanie abstraktných spôsobov myslenia, ktoré nám umožňujú hlbšie chápať skúmané skutočnosti. Stále presvedčivejšie spoznávame, že vo svete existujú zákonitosti, systém, poriadok a kľúčom pre ich pochopenie môže byť matematické myslenie. Matematika prispieva k odhaľovaniu všeobecných zákonov, podľa ktorých sa možno riadiť všetky javy i veci vo svojej existencii. Ukazuje sa, že ľudské myslenie môže vystihnúť realitu. Matematická úvaha je často najlepším spôsobom pre vyjadrenie pochopiteľnosti prírody, ktorú ľudia našli. Celé stáročia rozvoja rôznych matematických disciplín ukazujú, že matematika je putom medzi ľuďmi a svetom, oblasťou porozumenia medzi prírodou a človekom, duchovnou skutočnosťou neuveriteľne odrážajúcou realitu, spoločným produktom ľudského rozumu, ktorý sa osvedčil nielen ako nástroj chápania nemenných vzťahov a súvislostí, ale aj ako možnosť prenášať ľudské myšlienky o abstraktných súvislostiach a uplatňovať ich v predvídaní správania sa reálnych objektov. *Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet* (R. Bacon). Rozvoj matematiky je veľký dar pre kultiváciu myslenia a v spojení s prírodnými vedami aj životného prostredia.

Čím môže byť vyučovanie matematiky?

Pre mnohých učiteľov je to iba manipulácia so symbolmi, vzorcami, učenie o vzťahoch medzi formulami, ktorých užitočnosť sa ukazuje v praktických aplikáciách. Predmetom školskej matematiky je pre nich konvenčný systém neodporujúcich si najjednoduchších a najvhodnejších dohôd. Vyššiu matematiku potom chápu ako hierarchický usporiadaný systém štruktúr (objekty, relácie, operácie) od jednoduchších k zložitejším, od všeobecných ku špecifickým. Vyučovanie matematiky sa im stáva remeslom, manipuláciou so symbolmi, súhrnom formálnych teórií, systémom dedukcií rozvíjaných podľa pomerne presných pravidiel.

Sú aj takí, ktorí vyučujú školskú matematiku ako nástroj na riešenie zaujímavých problémov, ponúkajú postupnosť podnetných úloh a vhodných metód ich riešenia. Vnímajú matematiku ako metódu predvídania pomocou formálnych kalkulov s dobrou mierou spoľahlivosti. Matematické disciplíny sú pre nich súhrnom formálnych teórií, nástrojom vyhľadávania spôsobov uvažovania, ktoré vysvetľujú, organizujú a zjednodušujú naše predstavy o reálnom i myšlienkovom svete.

Vyučovanie matematiky môže byť aj zložkou ľudskej kultúry a tvorivej duchovnej aktivity bytostí nadaných rozumom a slobodnou vôľou. **Matematika je duševnou konštrukciou** vo vedomí ľudí, ktorú postupne doplňujú, rozširujú a budujú ako spoločnú mohutnú abstraktnú stavbu s reálnymi prakticko-technickými aplikáciami. Matematické poznávanie je pre nich prostriedkom i následkom zušľachtovania ľudského myslenia v spolupráci všetkých bytostí, ktoré sa tejto veľkej hry modelovania myšlienkových štruktúr zúčastňujú.

Skutočný proces vyučovania matematiky v našich školách má neraz charakter netvorivého remesla, samoučelnej hry v dohodnutých pravidlách, formálneho odovzdávania súboru vypreparovaných poznatkov, inštruktívnej vnucovanej odpovede na otázky, ktoré nikoho vnútorne nezaujali. Niekedy, ale práve vo vyučovaní matematiky sa ukazuje hlbšie systematické myslenie, tvorivé riešenie podnetných úloh, aktívna myšlienková činnosť (**pojmy, zovšeobecňovanie, abstrahovanie, dokazovanie, modelovanie**), porozumenie teoretickým i praktickým problémom. Vhodne didakticky koncipovaná výučba matematiky ponúka uplatnenie metódy genetickej paralely (v jednom ľudskom myšlienkovom procese sa zopakúva línia historického vývoja celého ľudstva) i princípu pedagogického paralelizmu (**učiť sa spoločne vnímať a vytvárať matematickú kultúru**). Môžeme tu uplatňovať motiváciu taktickú (vzbudiť záujem okamžite, krátkodobo) alebo strategickú ("nasadiť chrobáka do hlavy" na dlhšie obdobie). Hlboký ľudský vzťah pre logické myslenie, zdôvodnenú argumentáciu, pre pravdivé poznávanie bude vždy aj odrazom školskej práce učiteľov matematiky, ktorí pochopili, že úspešné vyučovanie matematiky má za následok aj vplyv na svetonázor i spôsoby hľadania trvalých ľudských hodnôt.

Zmysluplný vyučovací predmet

Zmyslom matematického poznávania je hlbšie pochopenie vzťahov a štruktúr abstrahovaných pojmov pre riešenie skutočných problémov teórie i praktického života. Hlbšie matematické vedomosti a ich používanie umožňujú zušľachtovanie našich predstáv i skutkov. Už štúdium školskej matematiky môže byť skoro pre všetkých záujemcov zmysluplnou, zaujímavou a podnetnou činnosťou. Skrz matematiku sa možno naučiť pohľadu do vnútra problému a zároveň i nadhľadu nad celú štruktúru. **Reč matematiky je hutná, stručná a pomerne jednoznačná.** Avšak dlhšiu dobu trvá, pokiaľ matematický systém pochopíme v celku a naučíme sa ho používať v rôznorodnej problematike.

Školské matematické vzdelávanie je organizovaný vyučovací proces určený svojím vecným obsahom, časovým rozsahom, výchovno-vzdelávacími cieľmi i učebnými prostriedkami. Obsahové priority a procesné zásady majú vyjadrovať všeobecné učebné ciele vyučovania matematiky, ktorými chceme formovať plnohodnotný rozvoj všetkých druhov myslenia (**funkčné, logické, kombinatorické, konštrukčné, algoritmicke**), osobnostný rast, primeranú systémovosť matematických vedomostí a zručností, hlbší vzťah k reálnej skutočnosti a jej interpretácii v matematických modeloch, zlepšenie komunikácie a spolupráce (**správna argumentácia, systematické dôkazové postupy,**

obsažnosť a hospodárnosť úvah, analýza chýb), otvorenosť k postupom ľudského intelektu (rozvoj záujmov, postojov a motivácií).

Školská matematika by mala zostať v prostredí všetkých škôl vyučovacím predmetom zmysluplne charakterizujúcim rozvoj ľudskej myšlienkovvej kultúry i technickej civilizácie. Z vedeckých matematických disciplín majú prenikať k vedomiu mladých ľudí účinné spôsoby a metódy univerzálnych myšlienkových postupov a ideí, ktoré odhaľujú nové, často aj veľmi abstraktné a špecifikované, prístupy ľudského poznávania (napr. vo vzťahu k nekonečnu). Už v škole požadujeme aktívnu činnosť študentov na vytváraní prostredia pre vlastné pozorovanie, konštruktívne porozumenie a rozvoj tvorivého myslenia. *Odvtedy ako sme sa pozreli na svet očami matematiky, objavili sme veľké tajomstvo: prírodné modely ukazujú na podstatné princípy, podľa ktorých funguje celý vesmír* (I. Stewart). Snažme sa, aby sme rozvíjali ľudskú schopnosť zmysluplného vnímania a správneho úsudku. Tým zušľachtíme celú ľudskú osobnosť i spoločnosť. Už Boethius (asi 480-524) vedel, že *nemôže dosiahnuť božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike*.

Počty a merba - naša školská matematika

Každý civilizovaný človek s rozvinutou predstavivosťou pozoruje a klasifikuje javy, rozpoznáva súvislosti, hodnotí dosiahnuté výsledky, prijíma závery. Pochopiť realitu pomáha aj logicko-matematické myslenie so svojimi špecifikami. Skoro každý z nás spoznal v škole, že vyučovacím predmet pôvodne zvaný "počty a merba" rozvíjal aj našu pozornosť, vytrvalosť, pracovitosť, systematickosť i kritickosť. Neskôr nám rôzne matematické disciplíny umožnili poznávať a hodnotiť javy z kvantitatívneho i kvalitatívneho pohľadu, príčinných súvislostí, prenikať do riešenia nielen prírodovedných zákonitostí, technických konštrukcií a technologických postupov, ale aj spoločenskovedných problémov. Matematická veda nám pomáha účinne argumentovať, dokazovať, podnecuje našu pojmovú originalitu.

Systematické pozorovanie a experimentovanie sú užitočné pomôcky pre ľudský intelekt. Abstrahovaním a zovšeobecnením odhalených vzťahov, doplnených o základné definície a uznané axiómy, sa pred človekom otvoril svet zdokonalených predstáv. Cez matematický prístup sme objavili svet ideálnych foriem spojených prostredníctvom stálych a nevyhnutných vzťahov, ktoré môže sledovať iba inteligentný rozum. Tým sme spoznali, že objavovanie súvislostí a odhaľovanie zákonov je možno jednou z najväčších ľudských radostí. Ak chápeme organizáciu, štruktúru, ktorá zjednocuje a vysvetľuje, máme skutočné potešenie z úspechov ľudského myslenia. *Zázrakom je, že čisté myslenie môže vystihnúť realitu*.

Po mnohých rokoch učiteľského pôsobenia je mojim presvedčením, že *zmysluplnosť šírenia matematického vzdelania* v našich školách môžeme oprávnene zdôvodňovať aj nasledujúcimi desiatimi charakteristikami:

1. *Rozvoj abstraktného myslenia a praktických idealizácií, možnosť odhalenia všeobecných zákonov a hlbšej podstaty sveta;*

2. Návyk na presné formulovanie problémov, definovanie pojmov a spresňovanie významu slov i pre tvorivé využívanie ľudského intelektu všeobecne;
3. Hospodárnosť úvah, logické zdôvodňovanie a argumentovanie (overovanie hypotéz, správnosť úsudkov, protipríklady);
4. Efektívnosť matematických postupov (jazyk, symbolika, štruktúry, deduktívna výstavba, algebrizácia, dôkazové metódy);
5. Uplatňovanie vhodných výpočtových algoritmov a počítačovej techniky, praktické aplikácie v technickej a technologickej praxi;
6. Rozvoj systémových kombinačných schopností a pravdepodobnostných i štatistických odhadov (združovanie a organizovanie údajov, predpovede, kontroly);
7. Podnety pre analýzu i syntézu rôznorodých problémov a postupov ich riešenia, (matematizácia reálnych situácií, stratégia odhadov);
8. Prehlbovanie geometrickej predstavivosti, schopnosti znázorňovať a využívať zhodnosť a podobnosť;
9. Možnosť predvídania pomocou formálnych kalkulov s dobrou mierou spoľahlivosti;
10. Vyhľadávanie spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú, zjednodušujú a umožňujú pochopiteľnosť prírody i človeka v nej.

Možnosti spolupráce

Počas vyučovania školskej matematiky je veľmi dôležité vytvoriť vhodnú komunikačnú klímu (**zosúladená motivácia, otvorený dialóg, úspešná činnosť, ľudská spolupráca, spontánne porozumenie**). Cieľom je pripraviť zmenu v kvalite psychiky žiaka (zdvihnutie sebadôvery vo vlastné schopnosti žiaka; zvýšenie túžby po poznaní; vyšší stupeň rozvoja myslenia; zapamätanie ako dôsledok porozumenia; zážitok úspechu vlastným pričinením; dialogická stratégia, spätná väzba aj pre žiakov, možnosť klásť otázky)

Učiteľ školskej matematiky má usmerniť svojich žiakov k väčšej náročnosti a húževnatosti v štúdiu, má vedieť odhaliť pravý dôvod ich prípadného neúspechu. Vedomosti študentov a štýl ich študijnej práce sú často odrazom aj činnosti učiteľov, ich ľudských osobností a odbornopedagogickej erudície. Čím dôkladnejšia je učiteľova všestranná, pedagogická, odborná i motivačná príprava na vyučovaciu hodinu, tým lepšie a účinnejšie je vyučovanie a jeho dopad na študijnú aktivitu žiakov. Maximálna mobilizácia duševných síl je možná len vtedy, ak rozumová činnosť prináša nejaký pravdivý neformálny úspech. Bez sústavnej nefalšovanej previerky samostatnej spôsobilosti uplatniť matematické poznatky bude naďalej trvať nespokojnosť s matematickými vedomosťami väčšiny našich žiakov.

Pravidelne podnecovať a motivovať

Úspešní učitelia školskej matematiky uplatňujú niektoré všeobecne uznávané **aktivizačné prístupy** (vonkajšej i vnútornej motivácie) pre usmernenie a udržanie záujmu svojich žiakov. Skúšal som napríklad aj toto:

- Prejavujeme pred svojimi žiakmi úprimné nadšenie a osobný záujem o matematickú kultúru.
- Ukazujeme význam matematických vedomostí v skutočnom prostredí, v konkrétnych aplikáciách, v bežnej vedecko-technickej praxi.
- Uplatňujeme aj miernu tvorivosť a trpezlivé znovuobjavovanie poznatkov aktívnou myšlienkovou činnosťou našich žiakov.
- Vytvárame pestré intelektuálne prostredie, pravidelne obmieňame tematiku, ukazujeme neobvyklé postupy, hádanky aj ich prekvapivé riešenia.
- Nechajme žiakov experimentovať, súťažiť, odkrývať problémy, ponúkať nápady.
- Uplatňujeme aj ich vedľajšie mimoškolské záujmy, podporíme rôznorodé podnety pre myšlienkovú aktivitu ich intelektuálnych schopností.
- Vytvoríme našim žiakom takú príležitosť, aby objavovali matematické poznatky z ich vlastnej iniciatívy.

Učitelia matematiky majú byť v prvom rade zodpovední za to, či ich žiaci boli "zasiachnutí úprimne a hlboko" školskou matematikou, či pri vyučovaní premýšľali, či sa naučili myslieť. Poznávaním matematickej kultúry mohli získať primeranú výkonnosť pre efektívny rozvoj poznávacích schopností a rozvinutého intelektu. *Výsledky vlastného premýšľania sú hodnotnejšie ako všetka získaná cudzia múdrosť* (C.F. Gauss).

Záverečný odkaz

Matematika skúma nekonečne malé i nekonečne veľké. Dotýka sa absolútnych hodnôt i neostrých hraníc. Z jednoduchých faktov generuje významné dôsledky. Útočí na všeobecnosť, neznáša spory. Vytvára logické systémy, štruktúruje predstavy. Axiomatizuje, definuje, dokazuje. Nemôže si byť však istá sama sebou. Vnímajme aj školskú matematiku ako základný a nezjednodušiteľný jav kultúrny i civilizačný, zušľachtľujúci ľudský myšlienkový prejav. V matematickom poznávaní tušíme tvorivý proces charakteristický svojím špecifickým obsahom i zvláštnou formou, ktorý nám naznačuje určitú podivuhodnú schopnosť ľudského ducha vnímať kvantitatívne charakteristiky ako prejav ideálnych predstáv, ako príležitosť na vytváranie rozumového obrazu reálnych javov v abstraktných modeloch, ako dotyk s nekonečnom, neustále unikajúcim a predsa prítomným znakom tajomnej podstaty. Zdá sa nám, že žiadne poňatie matematiky nezaručuje jej zmysluplnosť a pravdivosť pre vždy a v celku. Poznáme Gödelove vety o neúplnosti axiomatických systémov, tušíme Tarskeho objav "nedefinovateľnosti pravdy", uznávame význam matematických postupov nielen v povahe formálnej, ale aj v ich hodnote obsahovej. Veríme, že školskú matematiku možno ponúkať ako odraz vzrušujúcej harmónie prírody a intelektu ľudskej bytosti, ako dotyk s nekonečnom a ideálnom, ako vnímavosť pre objekty nadčasové, stále a nemenné, ako svet otvorený pre slobodnú duchovnú tvorbu, ako životodarný prameň pre skrytú pravdu, ako príležitosť pre vytváranie zmysluplných a efektívnych modelov sveta, v ktorom žijeme. Matematika zostáva nezavŕšeným otvoreným tvorivým procesom ľudskej mysle skonštruovať univerzálny formálny jazyk umožňujúci postih-

núť jednotu večnej všetko obsahujúcej Pravdy. Rozvážnym a kvalitným vyučovaním matematiky v našich školách môžeme tvorivo obohatiť a zmysluplne rozvíjať myšlienkový obzor každého duchom obdareného človeka.

Filozoficko-didaktické poznámky

Naznačím niektoré myšlienky, ktoré nás môžu v našej učiteľskej práci aj naďalej inšpirovať a viesť k múdrosti nášho povolania:

- *Matematika ťa neučí jednoduché odpovede na nejakú otázku, ale celú jazykovú hru s otázkami aj odpoveďami.* L. Wittgenstein
- *Matematika je najmocnejší intelektuálny nástroj, ktorý bol kedy vytvorený a prostredníctvom ktorého unikáme času.* L. Kolakowski
- *Matematika je abstraktný kľúč na otváranie tajomstva skutočného vesmíru.* J. Polkinghorne
- *Matematika popisuje najzákladnejšie postupy vo svete z oblastí úplne oddelených od tých oblastí ľudskej skúsenosti, ktoré mali úlohu v našom vývoji, a to nás privádza k presvedčeniu, že skutočne má nejaký skrytý význam.* J.D. Barrow
- *Matematika, ktorou sa riadi náš fyzikálny svet, je neobyčajne plodná a mocná i ako matematika sama o sebe. Tento vzťah pokladám za hlboké tajomstvo.* R. Penrose
- *Matematika má duálnu povahu: je nezávislou disciplínou oceňovanou pre svoju presnosť a vnútornú krásu a súčasne je bohatým zdrojom nástrojov pre svet aplikácií.* P.A. Griffith
- *Milujem matematiku nielen preto, že je možné jej použitie v technike, ale aj preto, že je krásna, že do nej človek vložil svoju rozkoš z hry a že matematiky je schopná aj tej najvyššej hry a umožňuje nám zmocňovať sa nekonečna. Má čo povedať o nekonečne a o ideách. Má neuzavretú povahu ľudského tvorenia.* R. Péterová

Literatúra

- DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky*. Praha: Argo a Dokořán, 2002.
- FISCHER, R. – MALLE, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN, 1992.
- FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett, 1977.
- HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1989.
- HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.
- JEDINÁK, D.: *Didaktika ako profesionálna výbava učiteľa školskej matematiky*. Obzory MFI 2/2007.
- JEDINÁK, D.: *Hlavné výchovno-vzdelávacie idey školského vyučovania matematiky*. Technológia vzdelávania 1/2004.
- JEDINÁK, D.: *Matematická kultúra ako obohatenie ľudských predstáv*. Technológia vzdelávania 10/2007.
- JEDINÁK, D.: *Smerom k motivácii štúdia matematiky*. Pedagogická orientace '93, č.8-9.
- JEDINÁK, D.: *Školská matematika ako vytváranie zmysluplnej kultúry*. Pedagogické rozhľady 5/2007.
- JEDINÁK, D.: *Učiteľ matematiky - jeho osobnosť a práca*. Prešov: MC, 1992.
- KOVÁČ, L.: *Krása a vznešenosť učiteľského povolania*. Bratislava: Bradlo, 1992.
- KUDRIAVCEV, L.D.: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*. Bratislava: SPN, 1990.
- KUŘINA, F. - PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.
- STEWART, I.: *Odsud až do nekonečna (Průvodce moderní matematikou)*. Praha: ARGO, 2006.