Tombola

Úloha:

V tombole je 100 žrebov a 10 výhier. Máme dva žreby.
Aká je pravdepodobnosť, že výhra pripadne *aspoň na jeden* náš žreb?

Riešenie:

A.

Možností vybrať 10 žrebov zo sto je $C_{10}(100)$. Ak nebude medzi nimi žiadny náš žreb, takých možností je $C_8(98)$. Pravdepodobnosť, že žiadny náš žreb nevyhrá je

$$\frac{C_{10}(98)}{C_{10}(100)} = \frac{\dfrac{98\cdot 97\cdot\ldots\cdot 91\cdot 90\cdot 89}{10!}}{\dfrac{100\cdot 99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 91}{10!}} = \frac{90\cdot 89}{100\cdot 99} = \frac{89}{110}.$$

Pravdepodobnosť, že aspoň jeden náš žreb vyhrá je $1 - \frac{89}{110} = \frac{21}{110} \approx 0{,}1909$.

B.

Stanovme všetky možnosti výberu dvoch žrebov zo sto, aj všetky priaznivé možnosti výberu. Potom $P = \frac{C_2(10) + C_1(10)\cdot C_1(90)}{C_2(100)} = \frac{945}{4950} = \frac{21}{110} \approx 0{,}1909$.

C.

Stanovme, pravdepodobnosť, že žiadny náš žreb nevyhrá:

$P_{\mathrm{n}} = \frac{C_2(90)}{C_2(100)} = \frac{89}{110}$.

Teda $P = 1 - P_{\mathrm{n}} = 1 - \frac{89}{110} = \frac{21}{110} \approx 0{,}1909$.

D. (možnosť nesprávneho postupu)

Zdá sa, že pravdepodobnosť výhry na každý žreb je 0,1.
Potom by pravdepodobnosť pre priaznivú možnosť (prvý žreb vyhrá – druhý nevyhrá, prvý nevyhrá – druhý vyhrá, oba vyhrajú) bola $P = 0{,}1\cdot 0{,}9 + 0{,}9\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}1 = 0{,}19$. Ale to je iný výsledok ako 0,1909.

Správny postup je v tom, že žreby nemajú rovnakú pravdepodobnosť výhry, sú to podmienené javy: prvý má pravdepodobnosť výhry 0,1; ale druhý už $\frac{9}{99} = 0{,}0909\ldots$ a podobne pre pravdepodobnosť nevýhry.

Potom správne určenie hľadanej pravdepodobnosti je $P = \frac{1}{10}\cdot\frac{90}{99} + \frac{9}{10}\cdot\frac{10}{99} + \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{99} = \frac{189}{990} = \frac{21}{110} \approx 0{,}1909$ alebo $P = 1 - \frac{9}{10}\cdot\frac{89}{99} = \frac{189}{990} = \frac{21}{110} \approx 0{,}1909$.

Viem, kedy uzavrieť stávku

Úloha:

Aká je pravdepodobnosť, že medzi *n* osobami, môžeme nájsť aspoň dve, ktoré majú narodeniny v tom istom dni kalendárneho roku?

Riešenie:

Uvažujme, že rok má 365 dní. Pre *n* osôb je počet všetkých možností ich narodenín v roku $V'_n(365) = 365^n$, pretože vyberáme *n*-tice z 365 dní aj s opakovaním. Počet všetkých možností, že žiadne dve z *n* osôb nebudú mať narodeniny v tom istom dni roku je $V_n(365)$, pretože počítame koľko je *n*-tíc (záleží na poradí) z 365 dní bez opakovania (aby nemali narodeniny v ten istý deň roku). Pravdepodobnosť *P*, ktorú hľadáme, určíme ako doplnok k pravdepodobnosti, že žiadne dve z *n* osôb nemajú narodeniny v tom istom dni roku. Potom $P = 1 - \frac{V_n(365)}{V'_n(365)} = 1 - \frac{365.364...(365-n+1)}{365^n}$.

Užitočný môže byť poznatok, pre ktoré *n* (počet zúčastnených osôb) je už pravdepodobnosť, že aspoň dve osoby z nich majú v ten istý deň roku narodeniny, väčšia ako 0,5. Stačí vyriešiť nerovnicu *P* > 0,5. Potom prídete na to, že ak $n \geq 23$, môžete pre skupiny s týmto počtom ľudí uzavrieť stávku, že tam existujú aspoň dvaja ľudia s rovnakým dňom narodenín v danom roku. V dlhom rade stávok určite viackrát vyhráte ako prehráte.

Lotéria

Úloha:

V lotérii je *n* žrebov, z ktorých *m* vyhráva.
Niekto si kúpi *k* žrebov (*n* > *m; n* >*k;* (*n* – *m*) >*k*).
Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá aspoň na jeden kúpený žreb?

Riešenie:

Označme *A´* jav, že nevyhrá na žiadny kúpený žreb.

Potom $P(A') = \frac{\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{k}}$, pretože počet nevyhrávajúcich *k*-tíc je $C_k(n-m)$.

Teda pre jav *A* (vyhrá aspoň jeden kúpený žreb) platí

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{k}}.$$

(dmj)