Zaujímavé a primerané školské matematické úlohy

Úvod

Zdá sa mi, že príklady, ktoré tu predkladám, môžu byť podnetné a primerané aj vo vyšších ročníkoch základnej školy a v prvých ročníkoch stredných škôl. Ponúkajú trochu netradičné využitie základných matematických vedomostí (v nečakanej situácii, na dôkaz nemožnosti, pre uvedomenie si zvláštnosti, v komplexnosti matematických úvah). Každá z nich prináša pomerne krátky, ale myšlienkovo sústredený postup. Posúďte sami.

Neuveriteľný rébus

Doplňte za každú $\bullet$ jednociferné prvočíslo, aby bolo znázornené násobenie správne:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & \times & & \bullet & \bullet \\
\hline
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\hline
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

Riešenie:

Jednociferné prvočísla sú iba: 2, 3, 5, 7. Pretože súčiny 2×2, 2×3, 2×5, 2×7 nemajú na konci prvočíslo, môže byť poslednou cifrou oboch čísel iba 3, 5 alebo 7.

Teda dvojice 3, 5; 5, 3; 5, 5; 5, 7; 7, 5. Skúšame ......

Jediné riešenie je:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{7} & \mathbf{7} & \mathbf{5} \\
 & \times & & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\
\hline
 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\
\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \\
\hline
\mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{5}
\end{array}$$

Nemôže byť?

Dokážte, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel nemôže byť druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie:

Nemôže byť? To je otázka!

Súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel znamená:

$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = 4 \cdot (n^2 + 3n +3) + 2$, kde $n \in N$.

Pozrime sa „čo robia“ druhé mocniny prirodzených čísel:

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, … Ak je n párne, t.j. $n = 2k$, tak $n^2 = 4k^2$, teda každá druhá mocnina párneho čísla je deliteľná štyrmi.

Druhé mocniny nepárnych čísel sú vždy nepárne $[(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1=4(k^2 + k) + 1]$.

Náš hľadaný súčet je párny, teda príslušné $p \in N$ je tiež párne a to ale znamená, že má byť aj deliteľné štyrmi. Ale náš súčet $4\cdot(n^2 + 3n + 3) + 2$ nie je deliteľný štyrmi. Čiže také $p \in N$ neexistuje, aby pre $n \in N$ platilo $4\cdot(n^2 + 3n + 3) + 2 = p^2$.

Dokázali sme, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel nemôže byť druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Labutia pieseň

Rozložte číslo 2 na súčet štyroch rôznych zlomkov tvaru $\frac{1}{n}$, kde $n \in N$.

Riešenie:

Je potrebné vyriešiť rovnicu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 2$, aby *x*, *y*, *z*, *t* boli rôzne prirodzené čísla.

Pretože zlomky majú byť rôzne, musí pre aspoň jeden z nich, napr. $\frac{1}{x}$, platiť $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 2$,

t.j. $2 > x > \frac{1}{2}$. Teda pre $x \in N$ z toho vyplýva, že $x = 1$.

Potom $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$ a tiež $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < 1$, t.j. $3 > y > 1$, teda pre $y \in N$ je $y = 2$.

Tým potrebujeme, aby $\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$; teda bude znovu platiť napr. $\frac{1}{4} < \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$

t.j. $4 > z > 2$ v N, z toho vyplýva, že $z = 3$. Potom už vyhovuje iba $t = 6$.

Platí: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2+1}{6} = 2$.

Možnosti pre milión

Stanovte, koľko usporiadaných trojíc prirodzených čísel *x, y, z* vyhovuje vzťahu $x \cdot y \cdot z = 10^6$.

Riešenie:

10^6 môžeme rozložiť na súčin prvočísiel: $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$.

Hľadaný rozklad $x \cdot y \cdot z = 10^6$ môžeme „vidieť“ takto:

$(2^a \cdot 5^p) \cdot (2^b \cdot 5^q) \cdot (2^c \cdot 5^r) = 2^6 \cdot 5^6$, t.j. $x = 2^a \cdot 5^p$, $y = 2^b \cdot 5^q$, $z = 2^c \cdot 5^r$ tak, aby $a + b + c = 6$

a tiež $p + q + r = 6$, kde *a*, *b*, *c*, *p*, *q*, *r* sú nezáporné celé čísla.

Koľko je možností pre $a + b + c = 6$, ak $a, b, c \in \{0, 1, ..., 6\}$?

$$\left.\begin{array}{cccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\
\mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\
\mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\
\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\
\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1}
\end{array}\right\} \mathbf{28}$$

Ak si to systematicky rozpíšeme, dostávame 28 možností .

To isté dostaneme aj kombinatoricky pri predstave:

1 1 △ 1 1 1 △ 1, potom to bude $C_2(8) = P'_{2,6}(8) = 28$.

Taký istý počet možností je aj pre $p + q + r = 6$. Pretože ku každej trojici [*a*, *b*, *c*] existuje iný výber [*p*, *q*, *r*], je počet všetkých možností pre *x*, *y*, *z* rovný $28 \cdot 28 = 784$.

Odporúčaná literatúra

BURJAN, V. a kol.: *Matematický koktail*. Bratislava: SPN, 1991.

KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1990.

KUŘINA, F. a kol.: *Matematika a porozumění světu*. Praha: Academia, 2009.

KUŘINA, F. – PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.

STEWART, I.: *Kabinet matematických kuriozit*. Praha: Dokořán/Argo, 2013.

STEWART, I.: *Truhlice matematických podkladů*. Praha: Dokořán/Argo, 2013.

VRÁBEL, P.: *Heuristika a metodológia matematiky*. Nitra: UKF FPV, 2005.

THIELE, R.: *Matematické důkazy*. Praha: SNTL, 1985.

Dušan Jedinák