Vhodnou (matematickou) úvahou

Ponúkam pre mierne systematických študentov ZŠ i SŠ sedem zaujímavých úloh.
Ich zmysluplné vyriešenie vyžaduje primeranú mieru matematickej obratnosti a vhodnej aritmeticko-algebrickej predstavivosti.

Úloha 1 (Odhaliť magickosť)
Doplňte do tabuľky (pozri obrázok) také prirodzené čísla, aby súčet čísiel v každom riadku, v každom stĺpci i v oboch uhlopriečkach bol rovnaký.

	15	**3**
12		**24**

Riešenie:

$x = 6$	**21**	**18**
$a = 27$	**15**	**3**
12	**9**	**24**

Vtip systémového riešenia je v tom, že musí platiť (súčet v prvom stĺpci je rovnaký ako súčet v druhom riadku) $12 + a + x = 3 + 15 + a$ teda $x = 6$. Ostatné je už zrejmé.

Úloha 2 (S trochou aritmetiky)
Dokážte, že ak pre celé čísla x, y, z, t platí $x + y = z + t$, tak $(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$ možno zapísať ako súčet druhých mocnín troch celých čísel.

Riešenie:
Z predpokladu vyplýva, že $x + y - z = t$, teda $x^2 + y^2 + z^2 + (x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = (x + y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2$.

Úloha 3 (Študenti a učitelia)
Koľko je možností pridelenia štyroch študentov na preskúšanie trom učiteľom, ak požadujeme:

a) aby každý študent bol preskúšaný **aspoň jedným** učiteľom;
b) aby každý študent bol preskúšaný **práve jedným** učiteľom;
c) aby každý učiteľ preskúšal **aspoň jedného** študenta;
d) aby každý učiteľ preskúšal **práve jedného** študenta.

Riešenie:
Označme si študentov **A**, **B**, **C**, **D** a učiteľov **P**, **Q**, **R**. Potom

a) študenta **A** môže preskúšať **P**, **Q**, **R**, **PQ**, **PR**, **QR**, **PQR**, teda to je 7 možností; pre študenta **B** je to tiež týchto 7 možností, podobne aj pre **C** i **D**. Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé, tak všetkých možností spolu je $7^4 = 2401$.

b) naznačme jednotlivé možnosti pre každého študenta do tabuľky:

A	B	C	D
P	P	Q	R
R	R	R	R
Q	R	P	P

.
.
v jednotlivých riadkoch sú variácie štvrtej triedy (štyria študenti) z troch prvkov (traja učitelia) s opakovaním. Ich počet je $V_4'(3) = 3^4 = 81$.

c) učiteľ **P** môže preskúšať **A**, **B**, **C**, D, **AB**, **AC**, **AD**, **BC**, **BD**, **CD**, **ABC**, **ABD**, **ACD**, **BCD**, **ABCD**, teda 15 možností. Podobne 15 možnosti je pre **Q** aj pre **R**. Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé a tak spolu je možnosti $15^3 = 3375$.

d) rozpíšme jednotlivé možnosti pre každého učiteľa do tabuľky:

P	Q	R
A	A	A
A	B	B
B	B	A
B	C	D
D	C	B
D	D	D

.
.
to sú variácie tretej triedy (traja učitelia) zo štyroch prvkov (štyria študenti) s opakovaním a ich počet je $V_3'(4) = 4^3 = 64$.

Úloha 4 (Správna predstava, úspech zaručený)

Stanovte počet riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$ pre $x_i \in N_0$ a $n \in N$.

Riešenie:
Predstavme si napríklad konkrétne rovnicu $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, t.j. $k = 3$, $n = 5$.

Môžeme si rozpísať riešenia do tabuľky

x_1	x_2	x_3	
5	0	0	3 riešenia (môžeme zamieňať)
4	1	0	6 riešení
3	2	0	6 riešení
3	1	1	3 riešenia
2	2	1	3 riešenia, teda spolu je 21 riešení.

Môžeme uvažovať aj takto: Treba rozmiestniť päť jednotiek a dve značky, napr.

1   1 ⌂ 1   1 ⌂ 1   (to predstavuje riešenie 2 + 2 + 1 = 5).

To sa dá urobiť $C_2(7) = P'_{5,2}(7) = 21$ spôsobmi.

Ak našu úvahu zovšeobecníme pre $k, n \in N$, počet riešení danej rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n \quad \text{pre } x_i \in N_0 \text{ a } n \in N$$

bude $C_{k-1}(n + k - 1)$, teda ako počet rozdelení $(k - 1)$ značiek na $(n + k - 1)$ polí.

Úloha 5 (Nebudú naraz celé)

Ukážte a zdôvodnite, že obidva zlomky $\frac{(7n-1)}{4}$ a $\frac{(5n+3)}{12}$ nemajú zároveň celočíselnú hodnotu pre žiadne $n \in N$.

Riešenie:

Predpokladajme, nech sú spomínané zlomky pre niektoré n oba zároveň celé čísla: $\frac{(7n-1)}{4} = p$ (1) a $\frac{(5n+3)}{12} = q$ (2), kde p, q sú celé čísla.

To znamená, že z (1) vyplýva $n = \frac{4p+1}{7}$ a zároveň z (2) plynie $n = \frac{12q-3}{5}$.

Teda $\frac{4p+1}{7} = \frac{12q-3}{5} \Rightarrow 20p + 5 = 84q - 21 \Rightarrow 42q = 10p + 13$, ale to znamená, že ľavá strana rovnice je nenulové párne číslo a pravá strana nenulové nepárne číslo. To je zrejmý spor. Znamená to, že tvrdenie úlohy, ktoré je negáciou nášho predpokladu, je zdôvodnené i dokázané.

Úloha 6 (Najmenšie a prirodzené)

Nájdite trojicu najmenších po sebe idúcich prirodzených čísiel, ktorých súčet je druhou a zároveň aj treťou mocninou nejakých prirodzených čísiel.

Riešenie:

Označme si: $p + (p + 1) + (p + 2) = 3p + 3 = 3(p+1)$, kde $p \in N$. Nech existujú prirodzené čísla m, n tak, aby $3 \cdot (p + 1) = m^2 = n^3$. Potom, ale existujú aj prirodzené čísla x, y tak, že platí $3 \cdot (p+1) = 3^2 \cdot x^2 = 3^3 \cdot y^3$ (prvočíselný rozklad prirodzených čísiel). Z toho vyplýva, že $p + 1 = 3 \cdot x^2 = 3^2 \cdot y^3$ a teda aj $x^2 = 3 \cdot y^3$; tomuto vyhovujú najmenšie prirodzené $y = 3$ a $x = 9$. Potom $p = 242$.

Hľadaná najmenšia trojica prirodzených čísiel s požadovanými vlastnosťami je
$242 + 243 + 244 = 729 = 27^2 = 9^3$.

Úloha 7 (Rok narodenia)

V roku 2007 súčet prvého dvojčíslia a posledného dvojčíslia roku môjho narodenia vyjadril môj vek. V ktorom roku 20. storočia som sa narodil?

Riešenie:

Zapíšme popisovaný stav (podčiarknuté písmená chápeme ako cifry: $p, q, x, y \in Z_0^+$):
$2007 - 19\underline{pq} = \underline{xy}$, to znamená:

1. ak nebude prechod cez desiatku medzi poslednými ciframi, tak $10 - p = x$ a $7 - q = y$, teda podľa zadania úlohy má platiť: (môj vek) $10 \cdot (10 - p) + 7 - q = 19 + 10p + q$ (súčet prvého dvojčísla a posledného dvojčísla roku môjho narodenia). Potom po algebrickej úprave platí 100 –

$10p + 7 – q = 19 + 10p + q \Rightarrow 107 – 19 = 20p + 2q \Rightarrow 10p + q = 44$, tomu vyhovuje pre kladné celé p, q z $\{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$ iba $p = 4$ a $q = 4$, teda $x = 6$ a $y = 3$.

2. ak by bol prechod cez desiatku medzi poslednými ciframi, tak by malo platiť
$10 – (p + 1) = x$ a $17 – q = y$. Potom zo zadania úlohy $10\cdot(10 – p – 1) + 17 – q = 19 + 10p + q$.
Teda po algebrickej úprave platí $100 – 10p – 10 + 17 – q = 19 + 10p + q \Rightarrow 107 – 19 = 20p + 2q$
$\Rightarrow 10p + q = 44$, tomu vyhovuje pre kladné celé p, q z $\{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$ iba $p = 4$ a $q = 4$, ale neplatí $17 – q = y$, lebo 17 – 4 = **13** a to nie je jednociferné celé kladné číslo. Predpoklad prechodu cez desiatku nevyhovuje.
Zadaniu úlohy vyhovuje 2007 – 19**44** = **63**, 19 + **44** = **63**. Narodil som sa v roku 1944.

Želám vám odvahu i rozvahu pri spoznávaní matematickej kultúry, ktorá tvorivo zušľachťuje spôsoby ľudského premýšľania, dôslednej argumentácie, zmysluplného objavovania i systematického dokazovania.

Dušan Jedinák