Nenáročná geometria i aritmetika

Známy René Descartes (1596–1650) vtipne poznamenal: *Aritmetika a geometria sú ďaleko spoľahlivejšie ako iné vedy preto, že sa jediné zaoberajú vecami úplne prostými a jednoduchými.* Už v základnom matematickom vzdelávaní a potom aj na stredoškolskej úrovni možno ukazovať podnetné impulzy jednoduchej aritmetiky a nenáročnej geometrie. Ponúkam štyri príklady prehľadných aritmeticko–geometrických súvislostí, ktoré možno odhaliť v každom trojuholníku.

Vhodné úpravy – cesta k vyriešeniu

Úloha: Pozrime sa, čo vieme o trojuholníku *ABC* a jeho uhloch, ak pre veľkosti jeho strán a, b, c platí $\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0$.

Riešenie:

A. Vynásobme danú rovnosť výrazom $a \cdot b \cdot c$. Dostaneme $(c-b) \cdot b \cdot c + (a-c) \cdot a \cdot c + (b-a) \cdot a \cdot b = 0$ a z toho $b \cdot c^2 - b^2 \cdot c + a^2 \cdot c - a \cdot c^2 + a \cdot b^2 - a^2 \cdot b = 0$. Výhodné by bolo ľavú stranu upraviť na súčin. To sa dá, ak doplníme ľavú stranu o výraz $a \cdot b \cdot c - a \cdot b \cdot c$ (to je nula).

Dostaneme $a \cdot b \cdot c + b \cdot c^2 - b^2 \cdot c + a^2 \cdot c - a \cdot c^2 + a \cdot b^2 - a^2 \cdot b - a \cdot b \cdot c = 0$ a potom

$c \cdot (a \cdot b + b \cdot c - b^2 - a \cdot c) + a \cdot (a \cdot c + b^2 - a \cdot b - b \cdot c) = 0$, teda $(c-a) \cdot (a \cdot b + b \cdot c - b^2 - a \cdot c) = 0$ a tým aj $(c-a) \cdot (a-b) \cdot (b-c) = 0$. To znamená, že aspoň jeden z činiteľov je nulový ($a = b$ alebo $a = c$ alebo $b = c$).

Trojuholník *ABC* so spomínanou vlastnosťou musí byť rovnoramenný t.j. aspoň dva z jeho vnútorných uhlov musia mať rovnakú veľkosť.

B. Možno uvažovať aj takto:

Bez újmy na všeobecnosti možno predpokladať, že napr. $c \geq b \geq a > 0$. Potom nás možno napadne úprava zadanej rovnosti

$$\frac{c-b}{a}+\frac{b-a}{c}=\frac{c-a}{b}$$
$$\frac{c^2-b\cdot c+a\cdot b-a^2}{a\cdot c}=\frac{c-a}{b}$$
$$\frac{c^2-a^2-b\cdot(c-a)}{a\cdot c}=\frac{c-a}{b}$$
$$\frac{(c-a)\cdot(c+a-b)}{a\cdot c}=\frac{c-a}{b} \quad /a\cdot b\cdot c$$
$$(c-a)\cdot(c+a-b)\cdot b=(c-a)\cdot a\cdot c$$

Teda $c - a = 0$ alebo $c \cdot b + a \cdot b - b^2 = a \cdot c$ {teda $c \cdot (b-a) = b \cdot (b-a)$; to znamená, že $b - a = 0$ alebo $c = b$}. Záver: Bude platiť $a = c$ alebo $a = b$ alebo $b = c$.

Aritmetika s geometriou

Úloha: V trojuholníku *ABC* s celočíselnými dĺžkami strán *a, b, c* je dĺžka jednej výšky tohto trojuholníka súčtom dĺžok zvyšných dvoch výšok. Ukážte, že potom ($a^2 + b^2 + c^2$) je druhou mocninou celého čísla.

Riešenie: Pre obsah trojuholníka *ABC* platí $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$.

Potom $v_a = \frac{2 \cdot S}{a}$, $v_b = \frac{2 \cdot S}{b}$, $v_c = \frac{2 \cdot S}{c}$. Pretože, napr. $v_c = v_a + v_b$, tak $\frac{2 \cdot S}{c} = \frac{2 \cdot S}{a} + \frac{2 \cdot S}{b}$ $(S \neq 0)$.

To znamená, že $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $/\cdot\ a{\cdot}b{\cdot}c$ a potom $a{\cdot}b = b{\cdot}c + a{\cdot}c$ aj $a{\cdot}b - a{\cdot}c - b{\cdot}c = 0$.

Ak si uvedomíme, že $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.\underbrace{(a{\cdot}b - a{\cdot}c - b{\cdot}c)}_{0} = a^2 + b^2 + c^2$

a číslo $(a + b - c)$ je celé, tak aj $(a^2 + b^2 + c^2)$ je druhou mocninou celého čísla.

Výpočtová geometria s aritmetikou

Úloha: Ukážte, že pre veľkosti výšok v_a, v_b, v_c a veľkosť polomeru ρ kružnice vpísanej do ľubovoľného trojuholníka *ABC* platí $v_a + v_b + v_c \geq 9{\cdot}\rho$.

Riešenie: Vieme, že pre každé tri kladné reálne čísla platí nerovnosť medzi ich aritmetickým a geometrickým priemerom:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1.a_2.a_3} \qquad (1)$$

Pre prevrátené hodnoty čísel a_1, a_2, a_3 t.j. pre $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ platí tiež

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq \sqrt[3]{\left(\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{a_3}\right)} \qquad (2)$$

Ak vynásobíme spolu nerovnice (1) a (2) dostaneme

$$(a_1 + a_2 + a_3)\cdot\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

Aj pre čísla v_a, v_b, v_c tiež platí $(v_a + v_b + v_c)\cdot\left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}\right) \geq 9 \qquad (3)$

Ale v každom trojuholníku *ABC* s výškami v_a, v_b, v_c a polomerom ρ vpísanej kružnice platí:

$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{\rho}$ {vyplýva to zo vzťahov $P = (a\cdot v_a)/2 = (b\cdot v_b)/2 = (c\cdot v_c)/2$, $P = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\rho$},

teda dosadením do (3) platí $v_a + v_b + v_c \geq 9{\cdot}\rho$.

Vzťah medzi obsahom a obvodom trojuholníka

Úloha: Dokážte, že ak je S veľkosť obsahu trojuholníka a s je veľkosť jeho obvodu, tak platí $s \geq 3\cdot\sqrt{2\cdot S}$.

Riešenie: Ak veľkosti strán trojuholníka označíme a, b, c veľkosti výšok v_a, v_b, v_c a napíšeme jeho obsah S tromi rôznymi spôsobmi, máme $S = \frac{a\cdot v_a}{2}$, $S = \frac{b\cdot v_b}{2}$, $S = \frac{c\cdot v_c}{2}$ a tým aj $2\cdot S = a\cdot v_a$, $2\cdot S = b\cdot v_b$, $2\cdot S = c\cdot v_c$.

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platia vzťahy

$\sqrt{2\cdot S} = \sqrt{a\cdot v_b} \leq \frac{a+v_a}{2}$; $\sqrt{2\cdot S} = \sqrt{b\cdot v_b} \leq \frac{b+v_b}{2}$; $\sqrt{2\cdot S} = \sqrt{c\cdot v_c} \leq \frac{c+v_c}{2}$.

Ak sčítame tieto tri nerovnosti, tak po úprave dostaneme

$$6\cdot\sqrt{2\cdot S} \leq (a+b+c) + (v_a + v_b + v_c) \qquad (1)$$

Pretože žiadna výška trojuholníka nemôže byť dlhšia ako jej dve "susedné" strany, platia aj nasledovné vzťahy: $b \geq v_a$, $c \geq v_b$, $a \geq v_c$, teda aj $a + b + c \geq v_a + v_b + v_c$.

Potom $2\cdot(a + b + c) \geq 6\cdot\sqrt{2\cdot S}$ a teda $s = (a + b + c) \geq 3\cdot\sqrt{2\cdot S}$.

Poznámka:

Ponúkaná problematika vzťahu aritmetiky a geometrie zo školskej matematiky pripravuje postupne stupňovaný úžas nad mohutnou jednotnou stavbou celej matematickej kultúry.

(*Dušan Jedinák*)