

Kurt GÖDEL – hranica deduktívnych systémov ľudského poznania

Už dávno a doteraz

Od prelomu 5. a 4. storočia pred našim letopočtom, kedy žili napr. Eukleides z Megary a Eubulides z Milétu, vieme, že naše jazykové vyjadrenia poskytujú množstvo logických paradoxov. Jednoduché oznámenie „*Táto tu napísaná veta je nepravdivá.*“, nie je ani pravdivá ani nepravdivá. Odvtedy máme veľa otázok: Môžeš svoju vlastnú reč dokonale opísať svojou vlastnou rečou?

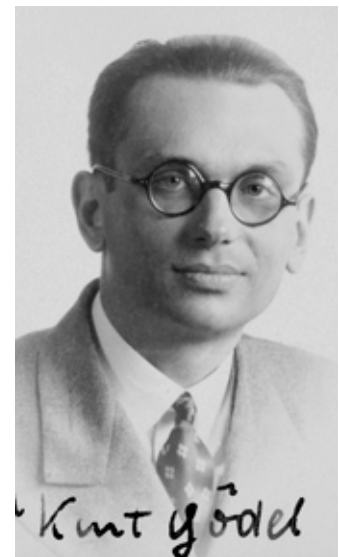


Môžeš, ale nie úplne. Môžeš svoj vlastný mozog preskúmať svojim vlastným mozgom? Áno, ale nie úplne. V každom dostatočne obsiahlom systéme možno formulovať vety, ktoré vo vnútri tohto systému nemožno dokázať ani vyvrátiť. K tomu sa dopracovala matematika. Vlastnými prostriedkami spoznala medze svojich možností. Rakúsky matematik a logik Kurt Gödel (1906–1978) dokázal, že každý logický systém obsahujúci formalizovanú rekurzívnu aritmetiku je buď sporný alebo obsahuje nejakú nerozhodnuteľnú formulu. Ukázalo sa, že bohatstvo matematických teórií nemožno úplne odhaliť axiomaticky. Systém logických formúl exaktnej matematickej teórie môže vystihnúť iba časť skutočného sveta, ktorý spoznávame ľudskou inteligenciou. Nerozhodnuteľnosť niektorých tvrdení nie je absolútna, ale je viazaná na príslušný systém

axióm s danou logikou. Aj keď budeme naďalej skúmať základy matematiky, konštruovať nové systémy axióm i nové dôkazové metódy, ani formalizácia ani axiomatizácia nám však „kameň mudrcov“ neprinesú. Musíme ďalej premýšľať a konať. Stále sa vytvárajúca neistota zostane neodstrániteľnou súčasťou aj v matematike.

Životné osudy

Rakúsko–Uhorsko bolo mnohonárodnostným štátom. V nemeckej rodine riaditeľa textilky Rudolfa Gödela v Brne sa 28. apríla 1906 narodil druhý syn Kurt. Bol usilovným žiakom už na nemeckej základnej škole a s vyznamenaním absolvoval reálne gymnázium v Brne. O matematiku sa začal vážnejšie zaujímať, keď spoznal základné poznatky matematickej analýzy. Na viedenskú univerzitu odišiel s úmyslom prehĺbiť si fyzikálne vedomosti. Ovplyvnili ho však matematické prednášky a začal systematicky študovať základy matematiky i logiky. Doktorát z matematiky dostal roku 1930. Krátko po smrti otca (1929) požiadal o vystaňovanie do Rakúska. Za prácu *O formálne nerozhodnuteľných vetách v Principia Mathematica a príbuzných systémoch* (vyšla r. 1931) získal právo vyučovať na vysokých školách (1933). Pôsobil na viedenskej univerzite, ale prednášal striedavo aj v Princetone, New Yorku a Washingtone. Vo Viedni sa oženil (1938) a na pozvanie od O. Veblena natrvalo presídlil do USA (1940), ich občanom sa stal roku 1948. Bol pracovníkom Ústavu pre perspektívne výskumy v Princetone. Profesorom bol menovaný (1953) až potom, keď získal Einsteinovu cenu (1951). Princetone bol pre neho miestom, kde mohol nerušene pracovať na svojich intelektuálnych záujmoch. Okrem dokončených článkov zanechal tisíce stránok poznámok. Zomrel 14. januára 1978 v Princetone na podvýživu a vysilenie z poruchy osobnosti.



Trvalý význam pozoruhodných objavov

Vo vedeckej oblasti dosiahol Kurt Gödel najslávnejšie matematické výsledky 20. storočia. Jeho vety, o neúplnosti formálnej teórie a nemožnosti dokázať bezspornosť formálnej teórie v rámci jej formalizmu, spôsobili zásadné zmeny nielen v logike a vo filozofii matematiky. Gödel dokázal, že

axióma výberu je nezávislá od ostatných axióm teórie množín (1935–1940). Tiež ukázal, že hypotéza kontinua je bezosporná. Vyriešil Einsteinove rovnice gravitačného poľa (1949), publikoval tri odborné práce o problémoch relativistickej kozmológie. Predvídal a sledoval problematiku teórie výpočtovej zložitosti. Skúmal a študoval filozofické dôsledky novovybudovaných základov matematiky, logiky aj filozofie vedy (zvlášť sa cítil oslovený intuicionizmom ako zmysluplnou matematickou filozofiou).

Nefalšovaný platonista

Kurt Gödel vedel, že existuje tesný vzťah medzi matematikou a ľudským jazykom. *Matematika nevyrastá z jazyka, ale jazyk je možný len vďaka matematike.* Uznával to, že matematika nie je len formálna záležitosť, ale má reálny obsah, je vedou o existujúcich faktoch. *Som presvedčený, že matematické pojmy tvoria svoju vlastnú objektívnu realitu, ktorú nemôžeme ani stvoriť ani zmeniť, len vnímať a popisovať.* Matematické výroky nehovoria o časopriestorových materiálnych veciach, ale ich objektívnym obsahom sú vzťahy medzi vlastnosťami idealizovaných pojmov. Neuznával, že matematika je len naším vlastným výtvorom, vyvracal nominalistický názor o tom, že matematika sa skladá iba zo syntaktických konvencií a ich dôsledkov. *Matematika popisuje mimo zmyslovú skutočnosť, ktorá existuje nezávisle na aktoch aj na dispozíciách ľudskej mysle a je iba vnímaná ľudskou myslou a to vnímaná pravdepodobne veľmi neúplne.* Zmyslové podnety i matematické intuície sú dva aspekty objektívnej reality.

Možnosti i medze matematiky a logiky



Hlavnou funkciou matematiky (ako každého pojmového myslenia) je dostať pod kontrolu obrovskú rozmanitosť jednotlivostí sveta. Gödel zistil, že aj pojem dokázateľnosti môže byť definovaný aritmeticky, ale v aritmetike nemožno definovať pravdu. Ukázal, že neexistuje všeobecná efektívna metóda s konečným počtom operácií, aby sme mohli všetky formule považovať za dokázané. Matematicky presne môže byť dokázané, že v každom konzistentnom formálnom systéme, ktorý obsahuje určitú časť konečnej teórie čísel, existujú nerozhodnuteľné aritmetické vety a konzistencia žiadneho takéhoto

systému nemôže byť dokázaná v tomto systéme. Samotársky génius ukázal, že ani matematický štandard presnosti a exaktnosti nezabezpečí pre vedu jej konzistentnosť. Ak aj nenachádzame spor, to neznamená, že spor neexistuje. Gödel ukázal, že nie je možná úplná formalizácia nášho poznávania založená na dedukcii zo systému prijatých axióm. Ľudský duch bude asi vždy v reálnej skutočnosti nachádzať svojimi myšlienkovými predstavami také zložité štruktúry, že na ich usporiadanie nebudú úplne stačiť žiadne ním konštruované konečné matematicko-logické formuly alebo filozoficko-metodologické sústavy.

Len zdanlivý bezbariérový prístup

Mnohé naše myšlienkové problémy vyžadujú často prenikavú filozoficko-metodologickú sústredenosť do hĺbky podstaty a bezchybnú logiku úsudkov i argumentácií. Kurt Gödel ukázal, že úplná formalizácia nášho poznania je ilúziou. *Nikdy nemožno dokázať bezospornosť formálneho systému dôkazovými prostriedkami, ktoré sú v skúmanom systéme formalizované.* Náš poznateľný svet aj s celou jeho matematicko-logickou štruktúrou je myšlienkovy nevyčerpatel'ný. Nemáme poistku pred omylmi a spormi. Cez ideály krásy, dobra a pravdy tvoríme a objavujeme stále nové neznáme neuzavreté svety. Večné, nemenné a neotrasiteľné istoty nám stále unikajú v nedohľadne. Matematická kultúra nám ponúka niečo abstraktné, čo je zároveň krásne i užitočné. Parafrazujem s neistým Sokratom: *Usudzujem, že aj to, čo som nepochopil, je krásne.* (Dušan Jedinák)