Zmes úloh z kombinatoriky

a) Stanovte počet šesťciferných prirodzených čísiel neobsahujúcich číslice 2 ani 7.

b) Koľko je možností vybrať zo sedem mužov a štyroch žien šesťčlennú skupinu, v ktorej sú aspoň tri ženy?

c) Koľko je možností usporiadať vedľa seba päť dievčat a štyroch chlapcov tak, aby žiadni dvaja chlapci neboli bezprostredne vedľa seba?

d) Koľko je možností pre rozdelenie siedmych ruží a piatich tulipánov trom dievčatám (záleží len na počte z jednotlivých druhov pre rôzne dievčatá)?

e) Koľko možností máme pre výber štvorčlennej posádky z 10 kozmonautov, ak určití dvaja kozmonauti nemôžu letieť spolu?

Riešenie:

a) Na prvé miesto je sedem možností $\{1,3,4,5,6,8,9\}$ na ďalších piatich miestach toľko, koľko je $V_5^{/}(8)$. Teda všetkých možností je $7 \cdot 8^5 = 229\,376$

b) ak práve tri ženy: $C_3(4) \cdot C_3(7)$
ak práve štyri ženy: $C_2(7)$
spolu: : $C_3(4) \cdot C_3(7) + C_2(7) = 161$.

c) Rozsaďme dievčatá (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) tak, aby boli medzi nimi jednomiestne medzery. To môžeme urobiť 5! = 120 spôsobmi. Do medzier (sú štyri) a na dve miesta „zvonku“ môžeme rozsadiť štyroch chlapcov, takých možností je $V_4(6) = 360$. Obe rozsadenia sú nezávislé; možností, ktoré spĺňajú zadanie je $5! \cdot V_4(6) = 120 \cdot 360 = 43\,200$.

$\bigcirc$ d_1 $\square$ d_2 $\square$ d_3 $\square$ d_4 $\square$ d_5 $\bigcirc$

d) Predstavme si to na schéme:

ruže tulipány

a vpisujeme mená troch dievčat (zvlášť pre ruže a zvlášť pre tulipány). Vytvárame teda kombinácie s opakovaním (nezáleží na poradí) siedmej alebo piatej triedy z troch prvkov (tri mená dievčat). Ku každému rozdeleniu ruží patrí iné rozdelenie tulipánov. Všetkých spôsobov rozdelenia podľa zadania úlohy je: $C_7^{/}(3) \cdot C_5^{/}(3) = \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} = 36 \cdot 21 = 756$.

e) Je zrejmé, že sa jedná o vytvorenie posádky bez ohľadu na ich technické či veliteľské funkcie, t.j. vytvárame z nich štvorčlenné kombinácie bez opakovania (bez ohľadu na poradie v nich). Uvedieme tri rôzne postupy pre vyriešenie úlohy:

A. Ak z tých dvoch neznášanlivých, ktorí nemôžu letieť spolu, nevyberáme, máme $C_4(8)$ možností výberu. Ak vyberáme posádku s práve jedným z neznášanlivých, máme $2 \cdot C_3(8)$ možností. Spolu (lebo sú dve skupiny priaznivých možností) máme $C_4(8) + 2 \cdot C_3(8) = 70 + 112$, to znamená 182 možností.

B. Pri výbere štvorčlennej posádky bez ohľadu na dvoch neznášanlivých máme $C_4(10)$ možností. Tých možností, kde sa vyskytnú obaja neznášanlivci spolu, je $C_2(8)$, pretože sú tam dvaja z ôsmich, ktorí sa znášajú. Požadovaných možností podľa textu úlohy je teda $C_4(10) - C_2(8) = 210 - 28 = 182$ možností.

C. Predstavme si vyberané možnosti z hľadiska jedného z neznášanlivcov. Ostatných kozmonautov je pre neho deväť. Z nich sa dá vybrať požadovaná posádka s $C_4(9)$ možnosťami. Ak má byť náš neznášanlivec tiež v posádke, ten druhý tam byť nesmie, tak je možností výberu $C_3(8)$, lebo treba k nášmu neznášanlivcovi vybrať troch z 8 znášanlivých. Pretože takto máme dve skupiny priaznivých možností (náš neznášanlivec v posádke buď je alebo nie je), tak požadovaných výberov posádok je $C_4(9) + C_3(8) = 126 + 56 = 182$.

(*dmj*)