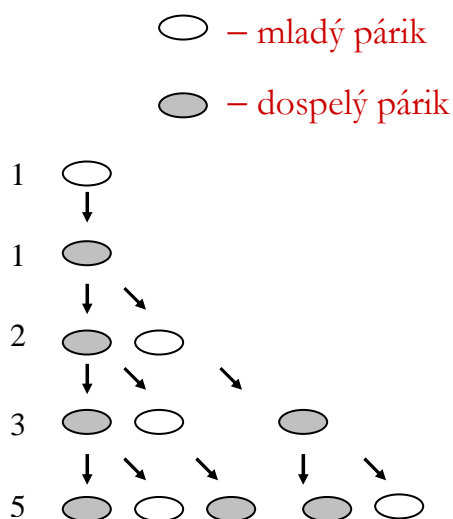


# Leonardo z Pisy prezývaný Fibonacci

## Zaujímavá číselná postupnosť

Pozrite sa na postupnosť čísiel: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, .... Viete podľa spoznaného pravidla napísať ďalšie čísla? Stačí, keď odhalíte zákonitosť ich postupného vzniku. Od tretieho čísla počínajúc, vzniká táto postupnosť čísiel tak, že súčet predchádzajúcich dvoch je hľadaným ďalším číslom. Teda pre každé  $i \geq 3$  platí  $a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$ . Postupnosť s touto vlastnosťou je známym príkladom rekurentnej postupnosti, lebo keď chcete poznať ďalší člen, musíte „bežať späť“ (latinsky *recurrere*), aby ste podľa určitého pravidla použili predchádzajúce členy. Takúto postupnosť vygeneruje riešenie tejto úlohy: *Predstavte si párik králikov (samička a samček). Predpokladajme, že v prvom mesiaci života sa ešte nerozmnožujú a dospejú ako dvojmesačné. Po druhom mesiaci samička každý mesiac vrhne nový párik. Každý párik sa potom rozmnožuje rovnakým spôsobom (a nehynú). Aký bude počet párov králikov postupne na začiatku každého mesiaca? Znázorníme si danú úlohu:*



$n$ -tý člen tejto postupnosti vypočítame ako súčet jeho dvoch predošlých členov.

Teda platí:  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ .

Počet párov králikov v jednotlivých mesiacoch vytvára postupnosť čísiel, ktorú dnes nazývame *Fibonacciho postupnosť*. Tak ju pomenoval francúzsky matematik F. Lucas (1842–1891) na pamiatku jedného z najlepších matematikov celého stredoveku Leonarda z Pisy, ktorého prezývali Fibonacci.

## Zo známeho mesta

Okolo roku 1170 sa v rodine mestského pisára v Pise, prezývaného Bonaccio (dobrák), narodil syn Leonardo. Keď vyrástol, odišiel na otcovo prianie, do Bougie v Alžírsku, aby sa naučil obchodné počty a aritmetiku. Neskôr si mimoriadne nadaný Leonardo rozšíril vedomosti cestovaním za obchodom po Egypte, Grécku, Sýrii,

Byzancii, Sicílii a Provencálsku. Jeho matematické poznatky dosiahli na vtedajšiu dobu vysokú úroveň. Zvládol dokonale arabskú aritmetiku i algebru. Napísal dve významné učebnice: *Liber abaci – Kniha o abaku* (tu sa pod slovom abak rozumie aritmetika) a *Praktická geometria*. Do dejín matematiky vošiel pod menom Leonardo Fibonacci to znamená Leonardo, syn Dobrákov, alebo Leonardo z Pisy (Pisánsky). Zomrel okolo roku 1240.

### Inšpiratívna učebnica

*Kniha o abaku* vyšla v roku 1202. Mala 15 kapitol, neskôr vytlačená mala 459 strán. Leonardo ju neskôr doplnil (1228) a postupne prepracoval. Bola výkladom o užitočných praktických výhodách indicko-arabského desiatkového pozičného systému. Obsahovala aritmetiku a algebru lineárnych a kvadratických rovníc v plnej hĺbke a úplnosti. Fibonacci v nej skúmal aj rozklad čísiel na súčín prvočísiel, odhaľoval kritériá deliteľnosti, napr. číslami 2, 3, 5, 9. Podal výklad poznatkov o úmerách.



Zlomky upravoval na najmenších spoločných menovateľov. Ako prvý v Európe prišiel na

myšlienku zaviesť záporné čísla a predstavovať si ich ako dlh. Vedel dobre riešiť neurčité rovnice i približne určovať druhé i tretie odmocniny. Fibonacci uviedol veľké množstvo výpočtových metód aritmetiky, algebry i teórie čísiel, mnohé sú z arabských zdrojov. Poznatky uvádzal na príkladoch a riešených úlohách.

### Praktické súvislosti

V roku 1220 napísal Leonardo z Pisy prácu *Prax geometrie* (má osem častí), ktorá obsahuje aj zememeračské postupy, výpočty vzdialeností a výšok. Dokázal v nej, že tri ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Uviedol geometrické vedomosti zo svojich ciest, ktoré mali vzťah k meraniu veličín, k aritmetike, planimetrii a stereometrii. Leonardo učil určovať vzdialenosti a výšky pomocou kvadrantu rozdeleného určitým spôsobom. Práca *Kniha štvorcov*, napísaná okolo roku 1225, je pokrokom v teórii čísiel a obsahuje úlohy na neurčité kvadratické rovnice.

Zaujímavosťou je, že Fibonacci vedel vyriešiť kubickú rovnicu  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$  veľmi presne v šesťdesiatkových zlomkoch, ale neuviedol, akým spôsobom na to prišiel.

### Jednoduchá úloha

Leonardo Pisánsky riešil veľké množstvo úloh a prispel k vytvoreniu matematických metód pre riešenie veľkých skupín podobných úloh. Jednoduchú úlohu z *Liber abaci* určite vyriešite aj vy: *Jeden hovorí druhému: Daj mi 7 denárov a budem mať päťkrát viac ako ty. Druhý hovorí: Daj ty mne 5 denárov a ja budem mať 7 krát viac než ty. Koľko denárov mal každý?* Fibonacci asi poznal arabské dielo

Al-Chvárizmího, Abu Kámila, Al-Karádžího i Omara Chajjáma. Sprostredkovane poznal výsledky čínskej, babylonskej i egyptskej matematiky.

## Nesmrtelná postupnosť

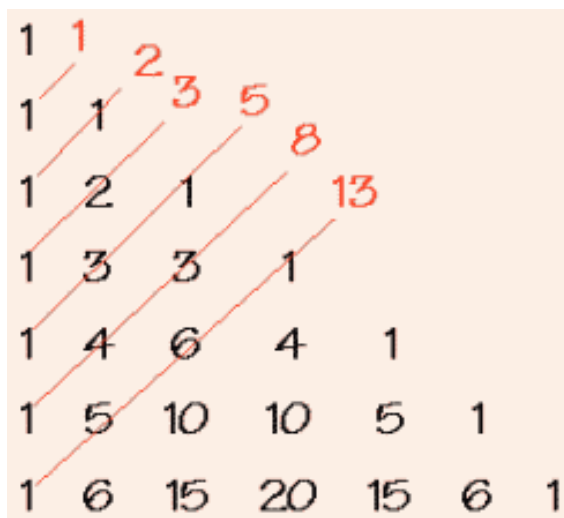
Už spomínaná úloha *Kolko párov králikov bude po jednom roku z jedného páru, keď každý pár má v každom mesiaci, okrem prvého, jednu dvojicu potomkov, ktorá sa od druhého mesiaca rozmnožuje takým istým spôsobom (uhynutie sa nepredpokladá)?*

Odpoveď je skrytá v  $n$  – tom člene príslušnej *Fibonacciho postupnosti*. Ak chcete priamo určovať  $n$  – tý člen *Fibonacciho postupnosti*, tu je hľadaný vzorec (objavený až v 19. storočí):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Pomer dvoch po sebe nasledujúcich členov tejto postupnosti sa s rastúcim  $n$  stále viac približuje tzv. *pomeru zlatého rezu*. Nečakanou skutočnosťou je, že aj pri skúmaní štruktúr prírodných telies i niektorých biologických javov sa ukazuje *Fibonacciho postupnosť* i pomer zlatého rezu. Ako keby boli symbolom vzniku poriadku z chaosu.

Budete sa asi čudovať, ale *Fibonacciho postupnosť* sa objaví, aj keď budete skúmať špirály pri usporiadaní semien v slnečnici, prechod svetelných lúčov cez priesvitné platne alebo postup pri stavbe včelieho plástu. V moderných matematických disciplínach sa využitie vlastností tejto postupnosti objavilo pri optimálnych metódach programovania, pri strojovom triedení, pri generovaní náhodných čísel. *Fibonacciho postupnosť* má naozaj veľa zaujímavých vlastností.



## Kone a ovos

Uvedme ešte jednu pomerne ľahkú úlohu z matematických prác od Leonarda z Pisy: *Päť koňov spotrebuje za 9 dní 6 meríc ovsa. Za koľko dní spotrebuje 10 koňov 16 meríc ovsa?* Predpokladajme, že hravo túto úlohu viete vyriešiť aj pred svojimi neskôr narodenými súkmeňovcami.

## Mohutne prevýšil súdobú úroveň

Bohatosť úloh, rozmanitosť a efektívnosť metód, presvedčivosť výkladu zachovali výsledky prác Leonarda z Pisy pre ďalekú budúcnosť. Spoznal to Luca Pacioli (1445–1514) a zaradil tieto poznatky do svojej *Summy aritmetiky*, ktorá vyšla tlačou v Benátkach roku 1494. Leonardo Pisánsky prispel v Európe k zavedeniu indických cifier a nuly. Samostatne rozpracoval nové algebrické postupy pre kupecké počty i geometrické problémy, približné výpočty aj teóriu čísel. Vytvoril nové pôvodné úlohy, kládol dôraz na dôkazy. Stal sa prvým európskym stredovekým matematikom,

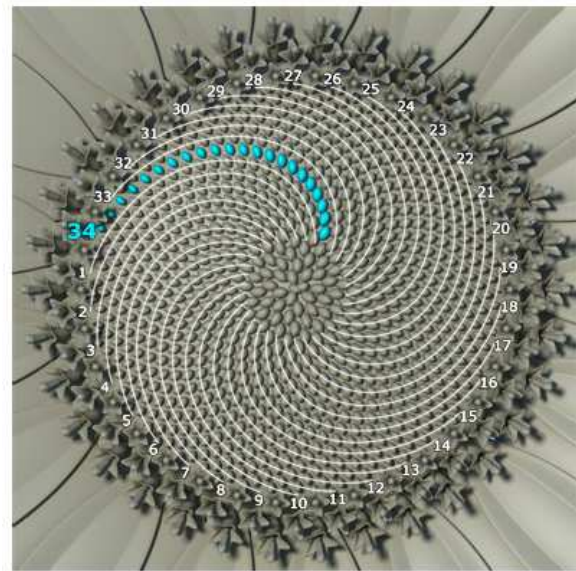
ktorý zvládol arabskú matematiku, sprostredkoval ju, ale aj obohatil. Medzi prvými používal algebru pre riešenie geometrických úloh. Spoznal, že aritmetika, algebra a geometria spolu súvisia a vytvárajú matematickú jednotu. Na jeho počesť nazývame identitu

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

*Fibonacciho identita.*

Matematické dielo Leonarda z Pisy malo veľký vplyv na rozvoj európskej matematiky a právom je trvalo zapísané v jej histórii.

(Dušan Jedinák)



0 1 1 2 3 5 8 13 21 **34** 55 89 144

V slnečnici sú zakódované aj čísla *Fibonacciho postupnosti* a nechýba tam ani zlatý rez a zlatý uhol. Slnečnicový kvet má tak geometricky presne usporiadané semienka, že vytvárajú dve proti sebe idúce rady špirál, ktorých je jedným smerom 34 a druhým smerom 55. Čísla 34 a 55 sú za sebou idúce čísla *Fibonacciho postupnosti*.