

Riešené úlohy s číslicami (pre 2012)

Ciferný súčet 2012

Úloha:

Stanovte najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2012.

Riešenie:

Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať aj čo najmenší rád, t.j. počet cifier, teda **čo najviac číslic 9**. Pretože $2012 : 9 = 223$ a zvyšok je 5, hľadané číslo s požadovanou vlastnosťou je **5999... 9**, v ktorom je na prvom mieste cifra 5 a potom nasleduje 223 cifier 9.

Požadované 2012. miesto

Úloha:

Zapišme za sebou čísla od 1 do 999: 12345678910111213 ... 997998999.

Aká číslica je na **2012.** mieste od začiatku?

Riešenie:

Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest.

Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest.

Trojčiferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2700 miest.

Hľadané 2012. miesto je 1823. (2012 mínus 189) miesto medzi trojčifernými číslami. Na 1823 miest sa zmestí $(1823 : 3) = 607$ trojčiferných čísel a ešte dve cifry. Hľadaná 607. trojica cifier v postupnosti 100101102... je číslo **706** (lebo 100 je prvá trojica, 101 je druhá trojica a teda **706** je 607. trojica) za ním nasleduje **707**, teda číslica na 2012. mieste je **0**.

Rovnaký ciferný súčet

Úloha:

Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2012} má ciferný súčet 2.

Riešenie:

A. Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2012} má najviac 2012 cifier.

Jednociferným prirodzeným číslom s požadovaným ciferným súčtom je iba 2.

Dvojcifernými prirodzenými číslami s požadovaným ciferným súčtom sú iba 11, 20.

Trojčifernými prirodzenými číslami s požadovaným ciferným súčtom sú 101, 110, 200.

Štvorcifernými prirodzenými číslami s požadovaným ciferným súčtom sú 1001, 1010, 1100, 2000.

Všeobecne:

n -ciferných prirodzených čísel zostavených z dvoch jednotiek je $(n-1)$, pretože $1□□□ \dots □$ a tých $□$, kde môže prísť ešte jedna 1 je práve $(n-1)$. K tomu sa pridá ešte možnosť $2□□□ \dots □$. Spolu je pre n -ciferné číslo teda práve n možností.

Všetkých možností pre našu úlohu teda je $1 + 2 + 3 + \dots + 2010 + 2011 + 2012 =$

$[(1 + 2012)/2] \cdot 2012 = \mathbf{2025078}$.

B. Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2012} má najviac 2012 cifier.

S požadovanou vlastnosťou a s jednou číslicou (2) je ich teda 2012 (2, 20, 200,...).

Ak tam budú práve dve jednotky, môžeme ich dávať na 2012 políčok, teda počet možností je

$C_2(2012) = (2012 \cdot 2011)/2 = 2023066$ (počet kombinácií druhej triedy z 2012).

Spolu všetkých požadovaných možností teda je $2012 + 2023066 = \mathbf{2025078}$.

Usilovnosť pre rok 2012

Úloha:

Encyklopédia má očíslovaných 2012 strán (prirodzené čísla od 1 do 2012 vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica **2**.

Riešenie:

Predstavme si čísla od 1 do 2012 napísané pod sebou.

1
2
3
.
10
11
12
.
20
21
.
100
101
102
.
200
201
.
1000
1001
1002
.
2000
2001
2002
.
2012

Určíme počet číslic **2** na miestach jednotiek. V každej desiatke (od začiatku) napísaných čísel je na mieste jednotiek jedna **2**, desiatok je medzi 2012 číslami práve 201, a ešte jedna za číslo 2012 teda počet **2** na miestach jednotiek je 202.

Na mieste desiatok je **2** v stovke čísel 10 krát (20, 21, ..., 29). V postupnosti 2012 čísel je stoviek 20. To znamená spolu 200 číslic **2** na mieste desiatok.

Na mieste stoviek je v tisícke čísel cifra **2** v číslach 200, 201, ..., 299, teda 100 krát. V postupnosti 2012 čísel sú dve tisícky, teda na miestach stoviek je 200 dvojk.

Na mieste tisícoviek je dvojka v číslach 2000, 2001., 2012; teda práve 13 dvojk.

Spolu je číslic **2** zrejme $202 + 200 + 200 + 13 = 615$.

Na stránkach očíslovaných od 1 do 2012 vrátane je použitá cifra **2** práve 615 krát.