

Metodicko-pedagogické centrum  
regionálne pracovisko  
Prešov

**mpc**

METODICKO-PEDAGOGICKÉ CENTRUM

UPJŠ v Košiciach  
Prírodovedecká fakulta  
Centrum celoživotného vzdelávania



**M**atematika **I**nformatika **F**yzika

číslo **35**

XIX. ročník

didaktický časopis učiteľov  
matematiky, informatiky a fyziky



Prešov  
október 2010

## ŠTÚDIUM ŠKOLSKEJ MATEMATIKY – UŽITOČNÝ PODNET PRE KULTIVÁCIU MYSLENIA

Dušan JEDINÁK  
Topoľčany

**Abstrakt:** *Mozaika myšlienok o význame matematického vzdelávania na pozadí dlhoročných učiteľských skúseností.*

**Kľúčové slová:** matematická kultúra, vyučovanie školskej matematiky.

### Spôsob zúšľachtovania

Školská matematika je všeobecne uznávaným vyučovacím predmetom v našich školách. Na skoro každom z nás zanechala svoje stopy. Priaznivé alebo odstrašujúce. Rodičia i študenti majú svoje rôznorodé skúsenosti z matematického usudzovania. Dúfam, že nebude na škodu, ak sa zamyslíme nad postavením elementárnej matematiky v školskom prostredí, nad zmyslom i významom matematického vzdelávania. Zvlášť učitelia matematiky (terajší aj tí budúci) by mali vedieť odpovedať na otázku, prečo vlastne šíria matematickú kultúru.

### Skúsenosti z prípravy budúcich učiteľov

Medzi desiatimi otázkami, ktoré som dal v písomnej anonymnej ankete poslucháčom didaktiky matematiky v 5. ročníku učiteľského štúdia matematiky PdF TU v Trnave v školskom roku 2006/2007 a 2007/2008 (22 + 16 študentov) boli aj tieto:

*Prečo ste sa rozhodli pre učiteľské povolanie v spojení s matematikou?*

*Navrhnite niekoľko zmien pri organizácii školského vyučovania matematiky.*

*Ktoré osobnostné črty a pedagogické zručnosti učiteľa matematiky zvlášť oceňujete?*

Po spracovaní odpovedí sa ukázali nasledujúce výsledky:

Rozhodnutie pre učiteľstvo matematiky bolo ovplyvnené dôvodmi: *oblúbenosť a zaujímavosť matematiky na základnej i strednej škole, dobré zvládnutie matematického učiva, logická postupnosť a nenáročná príprava, pomoc spolužiakom a nasledovanie učiteľa matematiky, radosť z práce s deťmi, sen byť učiteľkou* v 16 prípadoch; *účasť*

*v matematických súťažiach na základnej a strednej škole, výborné zvládnutie učiva, radosť z premýšľania a matematickej argumentácie* v 5 prípadoch; *podstata matematických vedomostí, systematickosť a logickosť, súvislosť s praxou* v 6 prípadoch; *výhodné spojenie s iným aprobačným predmetom, ponúkané okolnosti, určitá nevyhnutnosť, nič zásadne rozhodujúce* v 9 prípadoch; *len vysokoškolské štúdium, nie povolanie učiteľa* v 2 prípadoch.

Navrhované zmeny som roztriedil do skupín s súvisiacou početnosťou (mohli si určiť aj viac druhov zmien): *Efektívnejšie a názornejšie učebné pomôcky, využitie výpočtovej techniky* (13); *Zvýraznenie individuálneho prístupu k žiakom, skupinová práca, menší počet žiakov v triedach* (8); *Preukázateľnejšie súvislosti s praxou* (8); *Odstránenie stereotypu, spestrenie výučby, ukážky vzniku matematických poznatkov* (8); *Viac času na samostatné riešenie úloh žiakmi, problémové vyučovanie* (5); *Viac poznatkov z dejín matematiky, didaktická tvorivosť a ďalšie vzdelávanie učiteľov* (5); *Nech zmeny navrhnu vyššie postavení ľudia* (2).

Oceňované osobnostné črty a pedagogické zručnosti učiteľov matematiky vyšli s nasledujúcou početnosťou: *Vedieť motivovať, vysvetľovať a spájať teóriu s praxou* (21); *Vľúdnosť, tolerantnosť, trpezlivosť, empatia, priznanie chyby* (19); *Zmysel pre humor, vtipnosť, priateľskosť* (15); *Spravodlivosť, objektívnosť, schopnosť nadhľadu* (14); *Zaujatosť pre predmet, profesionálnosť, odbornosť, inteligencia* (8); *Prirodzená autorita, rešpekt, náročnosť, zásadovosť* (8); *Otvorenosť, ústretovosť, individuálny osobný prístup* (5);

Neformálnym zhrnutím spomínaných skúseností z prípravy budúcich učiteľov matematiky môže byť

# M

## M

citovanie komunikatívnejšieho študenta, ktorý sa priznal, že sa vzdal kariéry manažéra firmy a iných lákavých ponúk a aspoň päť rokov sa bude venovať, možno aj vedecky, učiteľstvu matematiky: *Získal som nadšenie byť učiteľom, pracovať na sebe, pozeráť na žiaka ako na úžasnú osobnosť, ktorej mám slúžiť, pomáhať k rastu, ... Fascinuje ma pedagogicko–psychologický základ práce učiteľa a školskú matematiku považujem v tomto smere za úžasný prostriedok k rastu osobnosti žiaka, ... Pri pozorovaní disjunktných vzťahov medzi učiteľmi a žiakmi, mi jednoducho teória množín nijak nepomohla, ... V škole žiaci potrebujú učiteľa, ktorý by ich chválil a zároveň bol spravodlivý, prísny a láskavý, ... aby aj pri vyučovaní matematiky z tváří detí vyžarovalo porozumenie.* Možno by sme mali, na stredných i vysokých školách, trochu zásadnejšie a systematickejšie s budúcimi učiteľmi matematiky diskutovať o zmysle a význame učiteľstva.

#### Čím je pre nás matematika?

Autor mnohých zaujímavých kníh o matematike, *Ian Stewart* (\*1945), charakterizoval matematiku ako systematický spôsob objavovania pravidiel a štruktúr, ktoré sa skrývajú za nejakým pozorovaným vzorom alebo pravidelnosťou a následného vysvetlenia toho, čo sa deje, použitím týchto pravidiel a štruktúr. Viem, že neexistuje úplná vedecká definícia matematiky. *Matematika je zároveň umenie i veda, je to eklektická zmes úžitku a tvorby, empirizmu a intuície (J. Ewing).* Vždy sa poteším z myšlienky, ktorú ponúkal nemecký matematik *W. Fuchs: Matematika je široká nádherná krajina otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť.* Zdá sa mi, že takto možno výstižne vyjadriť podstatu tejto vedy, spôsobov argumentovania, ktoré zvyčajne majú úlohu ľudského uvažovania a premýšľania, možnosť pochopenia prírodných i spoločenských javov rozumom.

Matematiku môžeme chápať ako všeobecnú metódu umožňujúcu spoznať to, čo sa týka systému, poriadku, miery, nezávisle od jednotlivých predmetov. Už *Platón* (424–346 pred n. l.) chápal matematiku ako výraz najhlbšej podstaty sveta, ako pravdu o nemennej povahe vecí. *Aristoteles*

(384–322 pred n. l.) hovoril, že *matematika pozoruje veci, nevnímajúc zmyslové, zaujímajúc sa o vlastnosti množstva a súvislostí.* Starovekí Gréci (*Táles, Euklides, Pytagoras, Archimedes*) odhalili systematickosť premýšľajúceho rozumu a ľudského citu v hľadaní pravdy, krásy a dobra. Využili v číselných vzťahoch univerzálny základ pre výklad sveta, usmernenie pre hľadanie pravdivého popisu prírodných javov. Pytagorovci študovali štyri matémy: *aritmetiku* (náuka o číslach), *harmóniu* (teória hudby), *geometriu* (náuka o rozptýlenosti objektov a ich meraní), *astronómiu* (náuka o pohybe hviezd). Odvtedy patrí ku kultúre myslenia spresňovať definície používaných pojmov, zdôvodňovať úsudky, dokazovať odvodené výroky. Z matematiky sa stal nástroj ľudského umu pre správne a presné myslenie, pre zmočňovanie sa významných faktov a odvodzovanie významných výsledkov. Zdanlivý svet matematiky vymodeloval myšlienkové procesy pre celú modernú vedu.

Nielen moderná doba ukazuje matematiku ako vyhľadávanie abstraktných spôsobov myslenia, ktoré nám umožňujú hlbšie chápať skúmané skutočnosti. Stále presvedčivejšie spoznáваме, že vo svete existujú zákonitosti, systém, poriadok a kľúčom pre ich pochopenie môže byť matematické myslenie. Matematika prispieva k odhaľovaniu všeobecných zákonov, podľa ktorých sa možno riadia všetky javy i veci vo svojej existencii. Matematická úvaha je často najlepším spôsobom pre vyjadrenie pochopiteľnosti prírody, ktorú ľudia našli. Celé stáročia rozvoja rôznych matematických disciplín ukazujú, že matematika je putom medzi ľuďmi a svetom, oblasťou porozumenia medzi prírodou a človekom, duchovnou skutočnosťou neuveriteľne odrážajúcou realitu, spoločným produktom ľudského rozumu, ktorý sa osvedčil nielen ako nástroj chápania nemenných vzťahov a súvislostí, ale aj ako možnosť prenášať ľudské myšlienky o abstraktných súvislostiach a uplatňovať ich v predvídaní správania sa reálnych objektov. Rozvoj matematiky je veľký dar pre kultiváciu myslenia a v spojení

s prírodnými vedami aj ovplyvňovania celého životného prostredia.

#### Čím môže byť vyučovanie matematiky?

Známy francúzsky matematik *René Thom* (1923–2002) pripomína: *Aká je filozofia matematiky, také je aj vyučovanie matematiky*. Pre mnohých učiteľov je to iba manipulácia so symbolmi, vzorcami, učenie o vzťahoch medzi formulami, ktorých užitočnosť sa ukazuje v praktických aplikáciách. Predmetom matematiky je pre nich konvenčný systém neodporujúcich si najjednoduchších a najvhodnejších dohôd. Vyššiu matematiku potom chápu ako hierarchický usporiadaný systém štruktúr (objekty, relácie, operácie) od jednoduchších k zložitejším, od všeobecných ku špecifickým. Vyučovanie matematiky sa im stáva remeslom, manipuláciou so symbolmi, súhrnom formálnych teórií, systémom dedukcií rozvíjaných podľa pomerne presných pravidiel.

Sú aj takí, ktorí vyučujú matematiku ako nástroj na riešenie zaujímavých problémov, ponúkajú postupnosť úloh a vhodných metód ich riešenia. Vnímajú matematiku ako metódu predvídania pomocou formálnych kalkulov s dobrou mierou spoľahlivosti. Matematické disciplíny sú pre nich súhrnom formálnych teórií, nástrojom vyhľadávania spôsobov uvažovania, ktoré vysvetľujú, organizujú a zjednodušujú naše predstavy o reálnom i myšlienkovom svete.

Vyučovanie matematiky môže byť aj zložkou ľudskej kultúry a tvorivej duchovnej aktivity bytostí nadaných rozumom a slobodnou vôľou. Matematika je myšlienkovou konštrukciou vo vedomí ľudí, ktorú spoločne dopĺňajú, rozširujú a budujú ako spoločnú mohutnú abstraktnú stavbu s reálnymi technologickými aj technickými aplikáciami. Matematické poznávanie je prostriedkom i následkom zušľachťovania ľudského myslenia v spolupráci všetkých bytostí, ktoré sa tejto veľkej hry modelovania myšlienkových štruktúr zúčastňujú.

Skutočný proces vyučovania matematiky v našich školách má neraz charakter netvorivého remesla, samoučelnej hry v dohodnutých pravidlách,

formálneho odovzdávania súboru vypreparovaných poznatkov, inštruktívnej vnucovanej odpovede na otázky, ktoré nikoho vnútorne nezaujali. Niekedy, ale práve vyučovanie matematiky ukazuje hlbšie systematické myslenie, tvorivé riešenie podnetných úloh, aktívnu myšlienkovú činnosť (pojmy, zovšeobecňovanie, abstrahovanie, dokazovanie, modelovanie), porozumenie teoretickým i praktickým problémom. Výučba matematiky ponúka uplatnenie metódy genetickej paralely (v jednom ľudskom myšlienkovom procese sa zopakúva línia historického vývoja celého ľudstva) i princípu pedagogického paralelizmu (učíť sa spoločne vnímať a vytvárať matematiku). Môžeme tu uplatňovať motiváciu taktickú (vzbudiť záujem okamžite, krátkodobo) alebo strategickú („nasadiť chrobáka do hlavy“ na dlhšie obdobie). Hlboký ľudský vzťah pre logické myslenie, zdôvodnenú argumentáciu, pre pravdivé poznávanie bude vždy aj odrazom školskej práce učiteľov matematiky, ktorí pochopili, že vyučovanie matematiky má za následok aj vplyv na svetonázor i spôsob hľadania trvalých ľudských hodnôt. Uznávané spolu s Komenským: *Byť didaktikom je zvláštny Boží dar*.

#### Zmysluplný vyučovaci predmet

Školská matematika by mala zostať v prostredí všetkých škôl vyučovacím predmetom charakterizujúcim rozvoj ľudskej myšlienkovvej kultúry aj informatickej civilizácie. Z vedeckých matematických disciplín majú prenikať k vedomiu študentov účinné spôsoby a metódy univerzálnych myšlienkových postupov a ideí, ktoré odhaľujú nové prístupy ľudského poznávania (napr. vo vzťahu k nekonečnu). Už v škole požadujeme aktívnu činnosť študentov na vytváraní prostredia pre vlastné pozorovanie, porozumenie a rozvoj myslenia. *Odvtedy ako sme sa pozreli na svet očami matematiky, objavili sme veľké tajomstvo: prírodné modely ukazujú na podstatné princípy, podľa ktorých funguje celý vesmír (I. Stewart)*. Snažme sa, aby sme rozvíjali ľudskú schopnosť zmysluplného vnímania a správneho úsudku. Tým zušľachťujeme celú ľudskú osobnosť. Už *Boethius* (asi 480–524) vedel, že *nemôže dosiahnuť božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike*.

**M**

# M

Predovšetkým na fakultách pripravujúcich učiteľov, ale nielen na nich, nesmieme zanedbávať rozmer výchovný a vzdelávací. Filozofický podtext matematického myslenia má zásadný význam metodologický. Spôsob vytvárania axiomatických matematických modelov s účinnými dôkazovými postupmi umožňuje budovať účinné predstavy o štruktúrach, ktorými popisujeme naše prírodné i spoločenské prostredie. Matematika ako užitočný spôsob premýšľania nám umožňuje usporiadať svet faktov cez určité idey a tak reálnym javom lepšie porozumieť. Modely pripravované matematikou sú niekedy nielen prekvapujúco harmonické, ale aj neuveriteľne praktické.

## S vnútorným presvedčením

Po mnohých rokoch učiteľského pôsobenia som dobrovoľne uznal, že zmysluplnosť šírenia matematického vzdelania v našich školách môžeme oprávnene zdôvodňovať aj nasledujúcimi desiatimi charakteristikami:

1. *Rozvoj abstraktného myslenia a praktických idealizácií, možnosť odhalenia všeobecných zákonov a hlbšej podstaty sveta;*
2. *Návyk na presné formulovanie problémov, definovanie pojmov a spresňovanie významu slov i pre tvorivé využívanie ľudského intelektu všeobecne;*
3. *Hospodárnosť úvah, logické zdôvodňovanie a argumentovanie (overovanie hypotéz, správnosť úsudkov, protipríklady);*
4. *Efektívnosť matematických postupov (jazyk, symbolika, štruktúra, deduktívna výstavba, algebrizácia, dôkazové metódy);*
5. *Uplatňovanie vhodných výpočtových algoritmov a počítačovej techniky, praktické aplikácie v technickej a technologickej praxi;*
6. *Rozvoj systémových kombinačných schopností a pravdepodobnostných i štatistických odhadov (združovanie a organizovanie údajov, predpovede, kontroly);*
7. *Podnety pre analýzu i syntézu rôznorodých problémov a postupov ich riešenia, (matematizácia reálnych situácií, stratégia odhadov);*

8. *Prehľbovanie geometrickej predstavivosti, schopnosti znázorňovať a využívať zhodnosť a podobnosť;*

9. *Možnosť predvídania pomocou formálnych kalkulov s dobrou mierou spoľahlivosti;*

10. *Vyhľadávanie spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú, zjednodušujú a umožňujú pochopiteľnosť prírody i človeka v nej.*

Neformálne matematické porozumenie je vždy prejavom vytrvalej myšlienkovej dôslednosti i ochoty prekonávať prekážky vo vnímaní a odhaľovaní súvislostí. Jednou z ciest, aby vedomosti zo školskej matematiky neboli iba formálne, je uplatňovanie zásady: **vhľad – porozumenie – použitie**. Ak majú byť matematické vedomosti užitočnou súčasťou ľudskej kultúry, tak majú zvýrazniť a rozvíjať samostatné a kritické myslenie, využívať abstraktné prístupy pri rôznej reprezentácii a odhaľovať rôznorodé hierarchizované štruktúry pojmov a súvislostí medzi nimi. Matematický spôsob uvažovania rozvíja **poznávacie schopnosti** (analýza a porozumenie javov a vzťahov, abstrakcia, zovšeobecnenie, objavovanie súvislostí, rozvoj predstavivosti, tvorba pojmov, štruktúra poznatkov), **vyhraňuje postoje a významy** (formulácia myšlienok, prírodné vysvetľovanie, argumentácia, organizácia informácií, kritický prístup a poučenie sa aj z chýb), **zvýrazňuje komunikáciu** (nevyhnutnosť zdôvodňovania tvrdení, neverbálne a symbolické vyjadrovanie, logická argumentácia, diskusia a porovnávanie názorov).

## Počty a merba – naša školská matematika

Vnímajme už aj školskú matematiku ako základný a nezjednodušiteľný jav kultúrny i civilizačný, zušľachťujúci ľudský myšlienkový prejav. V matematickom poznávaní uplatňujeme obsahom i zvláštnou formou, ktorý nám naznačuje určitú podivuhodnú schopnosť ľudského ducha vnímať kvantitatívne charakteristiky ako prejav ideálnych predstáv, ako príležitosť na vytváranie rozumového obrazu poznávaných javov v abstraktných modeloch, ako dotyk s nekonečnom, neustále unikajúcim a predsa prítomným znakom tajomnej

podstaty. Uznávajme význam matematických postupov nielen v povahe formálnej, ale aj v ich hodnote obsahovej. Skúsme školskú matematiku ponúkať ako odraz vzrušujúcej harmónie prírody a intelektu ľudskej bytosti, ako dotyk s nekonečnom a ideálnom, ako vnímavosť pre objekty nadčasové, stále a nemenné, ako svet otvorený pre slobodnú duchovnú tvorbu, ako životodarný prameň pre

skrytú pravdu, ako príležitosť pre vytváranie zmysluplných a efektívnych modelov sveta, v ktorom žijeme.

Rozvážnym a kvalitným vyučovaním matematiky môžeme obohatiť a rozvíjať myšlienkový obzor každého premýšľavým duchom obdareného človeka.

M

#### Odporúčaná literatúra

- DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky*. Praha: Argo a Dokořán, 2002.
- FISCHER, R. – MALLE, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN, 1992.
- FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett, 1977.
- HARDY, G.H.: *Obrana matematikova*. Praha: Prostor, 1999.
- HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.
- JEDINÁK, D.: *Matematická kultúra ako obohatenie ľudských predstáv*. Technológia vzdelávania 10/2007.
- JEDINÁK, D.: *Smerom k motivácii štúdia matematiky*. Pedagogická orientace 93, č.8–9.
- JEDINÁK, D.: *Školská matematika ako vytváranie zmysluplnnej kultúry*. Pedagogické rozhľady 5/2007.
- KAC, M. – ULAM, S.M.: *Matematika a logika*. Praha: SNTL, 1977.
- KOVÁČ, L.: *Krása a vznešenosť učiteľského povolania*. Bratislava: Bradlo, 1992.
- KUDRIAVCEV, L. D.: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*. Bratislava: SPN, 1990.
- KUŘINA, F. - PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.
- STEWART, I.: *Číslo prírody*. Bratislava: Archa, 1996.
- STEWART, I.: *Odsud až do nekonečna (Průvodce moderní matematikou)*. Praha: ARGO, 2006.
- VOPĚNKA, P.: *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Praha: Práh, 2000.
- WHITEHEAD, A.N.: *Matematika a dobro a jiné eseje*. Praha: Mladá fronta, 1970.

#### Adresa:

**Dušan Jedinák**

Trábečská 2136/8, 955 01 TOPOŇČANY

Email: [dusan.jedinak@satronet.sk](mailto:dusan.jedinak@satronet.sk)

**Dušan Jedinák** (1944), absolvent MFF UK v Prahe (1968), pôsobil hlavne ako učiteľ matematiky na Gymnáziu v Topoľčanoch, bol tam aj riaditeľom školy (1990–1991), potom sa stal úradníkom MŠMŠ i školským inšpektorom ÚIC v Bratislave. Od roku 1997 sa venoval príprave budúcich učiteľov matematiky (Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave; do 2008). Vytrvalo sa zaujímal o vnútornú motiváciu i popularizáciu školskej matematiky. Pomerne často publikoval odborné príspevky z didaktiky i dejín matematiky.

