Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2010, no. 14, pp. 40-48

HARMÓNIA V ŠKOLSKEJ MATEMATIKE

Dušan Jedinák

Tríbečská 2136, 955 01 Topoľčany, SR

e-mail: dusan.jedinak@satronet.sk

Abstract: Jedinák, D.: *Harmony in school mathematics, Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C. Didactic muse upon school mathematics harmony definition.*

Key words: popularization and motivation in the education of mathematics, elementary and secondary schools.

1. Úvod pre harmóniu

Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta (H. Weyl, 1885–1955). Známy nemecký filozof Ernst Cassirer (1874–1945) sa zaoberal aj epistemologickými problémami vo filozofii matematiky. Rád si pripomínam jeho myšlienku: *Číslo je nástrojom nášho prenikania do prírody a skutočnosti. Príroda ako celok aj so svojimi špeciálnymi oblasťami je – číslo a harmónia.* Zdá sa mi, že túto predstavu možno podporiť už pri vyučovaní školskej matematiky. Začal som sledovať hlbšie pojem harmónia a jeho použitie. V 48. ročníku MO v kategórii Z–9 bola zadaná úloha na určenie dĺžky priečky lichobežníka s danými veľkosťami základní, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami. Hľadaná veľkosť tejto priečky je **harmonickým priemerom** veľkostí oboch základní. To sa však nepovedalo, tak som si vyhľadal postupne príslušné doplnenie. Možno tým aspoň čiastočne naplním známy odkaz matematika a filozofa A.N. Whiteheada (1861–1947): *Vo veku rozumu nemôže existovať aktívny záujem, ktorý by odsunul nabok všetku nádej na víziu harmónie pravdy. Uspokojiť sa s rozporom znamená narušiť úprimnosť a morálnu čistotu. Patrí k sebaúcte intelektu, aby sledoval každé zauzlenie v myslení až do konečného rozuzlenia.*

2. K pojmu harmónia

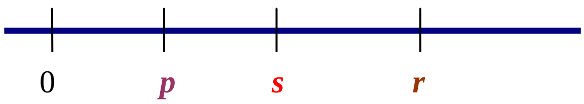
Harmónia znamená (z gréckeho *harma*) spojenie pevného s pohyblivým, súlad, súzvuk, súhra, zladenie, vyrovnanosť, súmernosť časti a celku, proporcionalita. Znamená to aj rovnaké číselné pomery (napríklad spájanie, význam i použitie akordov v hudobnej skladbe), výraz zákonitosti a miery vo svete, protiklad chaosu (organizovanosť), bezkonfliktná jednota doplňujúcich sa protikladov.

3. Z gréckych dejín

Pytagorovci, filozofické spoločenstvo a bratstvo nasledovníkov *Pytagora* (asi 582–497 pred n. l.), sa okrem iného zaoberali aj preniknutím do tajomstva čísiel a otázok harmónie. Možno ako prví v histórii začali chápať prirodzené čísla ako abstraktné entity, ktoré samé o sebe charakterizujú príčinný svet javov [3]. Objavili harmonické postupnosti v témach hudobnej stupnice (oktáva: pomer 1:2 pri dĺžkach strún, kvinta 2:3, kvarta 3:4). Vytvorili možnú charakteristiku všetkých vecí a javov v povahe pomerov čísiel, to dnes znamená, že základné sily vesmíru možno vyjadriť jazykom matematiky. Už *Archytas z Tarentu* (asi 428–365 pred n. l.) uvádzal niekoľko typov stredných veličín – priemerov a medzi nimi aj aritmetický, geometrický a **harmonický priemer**. Ak bola daná trojica kladných čísiel $a > b > c$, tak **harmonický priemer** bol daný ako $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$; z toho vyplýva, že $b = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$ (aj dnes je **harmonický priemer** čísiel a, c zadefinovaný tiež ako prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt a, c, teda $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$). *Aristoteles* (384–322 pred n. l.) vo svojej *Metafyzike* uviedol, že pytagorovci si to predstavovali takto: *Celé nebo je harmónia a číslo.*

4. Dnešný zápis

V súčasnosti môžeme **harmonický priemer** chápať a vysvetliť aj takto:
Ak prvé je ***p***, posledné ***r***, tak pre prostredné ***s*** (s uvedenou vlastnosťou) bude platiť (pozri obr.1)



obr. 1

$$\frac{s-p}{p} = \frac{r-s}{r},$$

teda $s \cdot r - p \cdot r = p \cdot r - p \cdot s$

$$s \cdot (r + p) = 2 \cdot p \cdot r$$

$$\boldsymbol{s} = \frac{2 \cdot p \cdot r}{p+r}$$

a to je náš ***harmonický priemer čísel p***, ***r***.

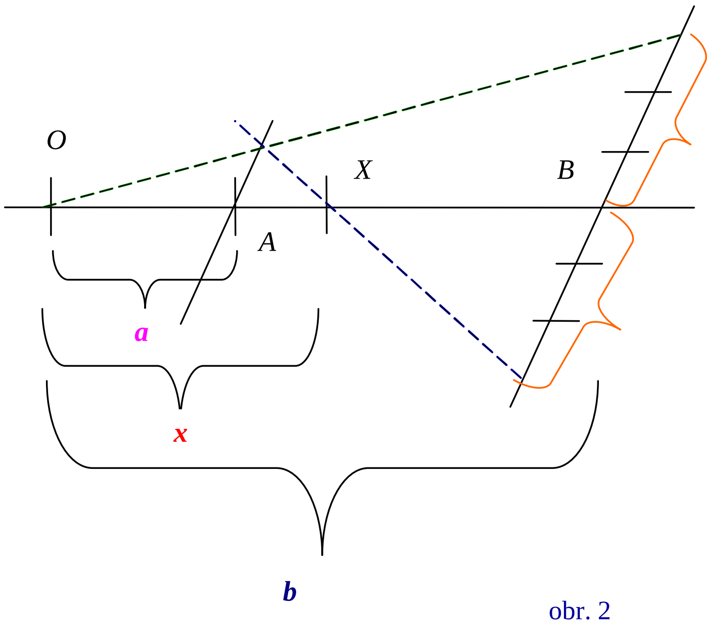
5. Matematická definícia

V odbornej literatúre nájdeme aj tento prístup:
Nech sú dané na priamke dva rôzne body A, B a bod $X \neq B$.
Pomer usporiadanej trojice bodov A, B, X je číslo $\lambda(ABX) = \pm\ |AX| / |BX|$.
Ak je X vonkajším bodom úsečky AB, alebo $X = A$, platí $+$;
ak X je vnútorným bodom úsečky AB platí $-$.

Nech sú dané na priamke dva rôzne body A, B a bod X, $X \neq B$ a bod Y, $Y \neq B$.
Dvojpomer usporiadanej štvorice bodov A, B, X, Y je číslo $\delta(ABXY) = \lambda(ABX) / \lambda(ABY)$.

Usporiadanú štvoricu bodov, ktorých dvojpomer sa rovná -1 nazývame ***harmonická štvorica bodov*** (body X, Y sú *harmonicky združené* vzhľadom na body A, B).

Ak pre harmonickú štvoricu bodov $ABXO$ označíme $|OA| = \boldsymbol{a}$, $|OB| = \boldsymbol{b}$, $|OX| = \boldsymbol{x}$, tak (podľa obr. 2) dostaneme:



obr. 2

$$-1=\delta(ABXO)=\frac{\lambda(ABX)}{\lambda(ABO)}$$

$$-1=\frac{-\frac{|AX|}{|BX|}}{+\frac{|AO|}{|BO|}}=\frac{-\frac{(x-a)}{(b-x)}}{\frac{a}{b}}$$

$$-1=-\frac{b(x-a)}{a(b-x)}$$

$$ab-ax=bx-ab$$

$$2ab=ax+bx$$

$$x=\frac{2ab}{a+b};$$

ale aj $x=\dfrac{2}{\frac{a+b}{ab}}=\dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$.

Pre nenulové čísla a, b výraz $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ t.j. aj $x=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ nazývame ***harmonický priemer*** čísiel a, b (prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt).
Všeobecnejšie: **harmonický priemer** kladných čísiel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

$$x_{harm.}=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

Harmonický rad je nekonečný rad, v ktorom každý jeho člen (okrem prvého) je harmonickým priemerom oboch svojich susedných členov, napr. rad, ktorého n –tý člen

$a_n=\dfrac{1}{n}$, t.j. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ tento rad je divergentný, jeho súčet je $+\infty$, lebo

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\dots\dots\dots+\frac{1}{16}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\dots \quad \dots$$

Ale $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0{,}5772156649\dots$

(*Eulerova konštanta*, o ktorej sa nevie, či je číslom racionálnym alebo iracionálnym).

Rad $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ nazývame ***anharmonický rad***,

konverguje a má súčet *ln* 2.

5. Naša súčasnosť

Naozaj by ma zaujímalo, s akou úspešnosťou vyriešia naši žiaci úlohu: Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h. Dozvedia sa, že sa v tejto úlohe uplatňuje **harmonický priemer**? Možno by sa nemalo vyskytovať v našich základných a stredných školách to, aby sa študenti nestretli s pojmom **harmónia**, ale ani to, aby nepoznali, čo nazývame **harmonický priemer** (**harmonický stred**). Profesor *Petr Vopěnka* vo svojom pojednaní *Rozpravy s geometrií* (Praha: Panorama, 1989) sa vyjadril: *V geometrickom svete sa krása stretla s pravdou... Je možné, že do geometrického sveta neprišla krása za pravdou, ale pravda za krásou... Kde bude videná pravda, tam bude hľadaná aj krása a naopak.*

6. Jednoduché úlohy, v ktorých sa vyskytuje harmonický priemer

- Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.
- Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je **harmonickým** priemerom veľkostí jeho základní.
- Vypočítajte veľkosť výšky zrezaného rotačného kužeľa, ak veľkosť obsahu jeho plášťa je súčtom veľkostí obsahov jeho podstáv (s polomermi R a r).
- Ukážte, že ak $\boldsymbol{n!}$ (pre každé $n\in N$) postupne vydelíme číslami 1, 2, 3, ..., n–1, n dostaneme **harmonickú postupnosť**.
- Znázornite a odôvodnite vzťah medzi aritmetickým, geometrickým a **harmonickým** priemerom dvoch kladných reálnych čísiel a, b: $\frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}\le\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}$.

6.1 Priemerná rýchlosť je harmonickým priemerom

Úloha: Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.

Riešenie: Priemer dvoch čísel m, n počítame ako $\frac{m+n}{2}$.

$\frac{m+n}{2}$ nazývame *aritmetický priemer* čísel m, n.

Ak sa vám však zdá, že priemerná rýchlosť z danej úlohy je 50 km/h, tak sa mýlite.

Priemerná rýchlosť vo fyzike je podiel celkovej dráhy ku spotrebovanému času.

Teda:

tam............ *dráha s* .... *rýchlosť* $v_1 = 60$ km/h .... *čas* t_1

späť........... *dráha s* .... *rýchlosť* $v_2 = 40$ km/h .... *čas* t_2

celková dráha 2·s .... *rýchlosť v* .... *čas* $t_1 + t_2$

priemerná rýchlosť: $\bar{v} = \dfrac{2s}{t_1 + t_2}$, po úprave: $\bar{v} = \dfrac{2s}{\frac{s}{60} + \frac{s}{40}} = \dfrac{2s}{\frac{5s}{120}} = \dfrac{240s}{5s} = 48$ km/h.

V matematike máme zavedený aj **harmonický priemer *a, b*** ($a, b \in R^+$) ako

$\dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt).

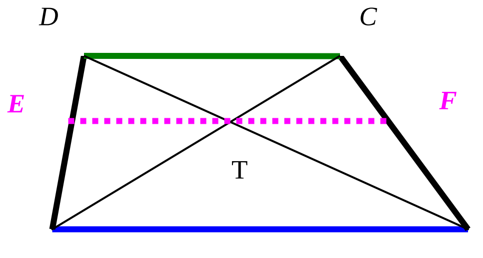
Potom vidíme, že priemerná rýchlosť pohybu po tej istej trase dvomi rôznymi rýchlosťami je **harmonickým priemerom** oboch rýchlostí $\bar{v} = \dfrac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$.

6.2 Uvidieť harmonický priemer

Úloha: Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je **harmonickým** priemerom veľkostí oboch jeho základní.

Riešenie:

Označme patričné body ako na obr. 3, kde $|\boldsymbol{AB}| = \boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{CD}| = \boldsymbol{c}$.



obr. 3

Trojuholníky *ABT* a *CDT* sú podobné (podľa vety *uu*, rovnobežky preťaté priečkou – striedavé uhly). Potom platí $|AT| : |TC| = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{c}$, t.j. $|TC| = \dfrac{c}{a} \cdot |AT|$.

Trojuholníky *TFC* a *ABC* sú tiež podobné (podľa vety *uu*) s koeficientom podobnosti

$\dfrac{|TC|}{|AC|} = \dfrac{|TF|}{|AB|}$. Teda môžeme vyjadriť $|TF| = \dfrac{|TC|}{|AC|} \cdot |AB|$,

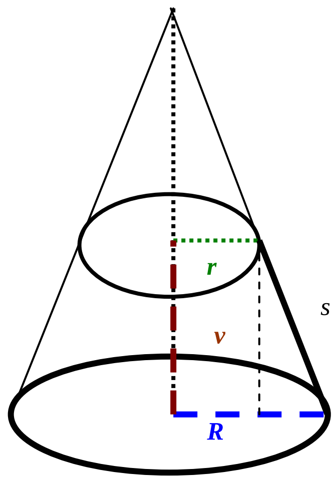
t.j. $|TF| = \dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{|AT| \cdot |AB|}{|AT| + |TC|} = \dfrac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \dfrac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \dfrac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \dfrac{a \cdot c}{a + c}$.

Podobne pre trojuholníky *TEA* a *CDA* s koeficientom podobnosti $\dfrac{|AT|}{|AC|}=\dfrac{|ET|}{|DC|}$ platí

$$|ET|=\frac{c\cdot|AT|}{|AC|}=\frac{c\cdot|AT|}{|AT|+|TC|}=\frac{c\cdot|AT|}{|AT|+\frac{c}{a}\cdot|AT|}=\frac{c}{1+\frac{c}{a}}=\frac{a\cdot c}{a+c}.$$

Potom platí $|EF|=|ET|+|TF|=2\cdot\dfrac{a\cdot c}{a+c}=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$ a to je **harmonický priemer** ***a***, ***c***.

6.3 Kužel a harmonický priemer



Úloha: Vypočítajte veľkosť výšky zrezaného rotačného kužeľa, ak veľkosť obsahu jeho plášťa je súčtom veľkostí obsahov jeho podstáv (s polomermi ***R*** a *r*).

Riešenie:

Vieme, že veľkosť obsahu plášťa zrezaného rotačného kužeľa je daný vzťahom

$$S_1=\pi\cdot(R+r)\cdot s\,,\ \text{kde}\ \ s=\sqrt{v^2+(R-r)^2}\,.$$

Súčet veľkostí podstáv je $S_2=\pi\cdot\left(R^2+r^2\right)$.

Potom podľa zadania úlohy platí $S_1=S_2$ a teda aj

$$(R+r)\cdot\sqrt{v^2+(R-r)^2}=R^2+r^2\quad /^2$$

$$(R+r)^2\cdot\left[v^2+(R-r)^2\right]=\left(R^2+r^2\right)^2$$

$$v^2=\frac{\left(R^2+r^2\right)^2}{(R+r)^2}-(R-r)^2$$

$$v^2=\frac{\left(R^2+r^2\right)^2-(R-r)^2\cdot(R+r)^2}{(R+r)^2}$$

$$v^2=\frac{\left(R^2+r^2\right)^2-\left(R^2-r^2\right)^2}{(R+r)^2}$$

$$v^2=\frac{\left(R^2+r^2+R^2-r^2\right)\cdot\left(R^2+r^2-R^2+r^2\right)}{(R+r)^2}$$

$$v^2=\frac{2\cdot R^2\cdot 2\cdot r^2}{(R+r)^2}$$

$$v=\frac{2\cdot R\cdot r}{R+r}$$

a to znamená, že **výška** takto požadovaného zrezaného rotačného kužeľa je **harmonickým** priemerom veľkostí polomerov príslušných podstáv.

6.4 Harmónia aj s faktoriálom

Úloha: Ukážte, že ak ***n!*** (pre každé $n \in N$) postupne vydelíme číslami 1, 2, 3, ..., $n-1$, n dostaneme **harmonickú postupnosť**.
Riešenie: Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ je **harmonická**, ak pre každé $k \in \{2, ..., n-1\}$ platí:

$a_k = \dfrac{2.a_{k-1}.a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}}$ (k – tý člen je harmonickým priemerom svojich susedov).

Pre náš prípad je $a_k = \dfrac{n!}{k}$, $k \in \{1, 2, ..., n-1, n\}$;

ukážeme, že $\dfrac{n!}{k} = \dfrac{2.\dfrac{n!}{k-1} \cdot \dfrac{n!}{k+1}}{\dfrac{n!}{k-1} + \dfrac{n!}{k+1}}$, pre každé $k \in \{2, ..., n-1\}$.

Upravujeme pravú stranu:

$$\frac{2 \cdot \dfrac{n!}{k-1} \cdot \dfrac{n!}{k+1}}{\dfrac{n!}{k-1} + \dfrac{n!}{k+1}} = \frac{2 \cdot \dfrac{n! \cdot n!}{(k-1) \cdot (k+1)}}{\dfrac{n! \cdot (k+1+k-1)}{(k-1) \cdot (k+1)}} = \frac{2 \cdot n! \cdot n!}{n! \cdot (2k)} = \frac{n!}{k}$$

Napríklad pre $n = 6$ platí: 6!/1, 6!/2, 6!/3, 6!/4, 6!/5, 6!/6, t.j. 720, 360, 240, 180, 144, 120.
Táto postupnosť spĺňa definíciu harmonickej postupnosti.
Ukázali sme, že každý člen spomínanej postupnosti (okrem prvého a posledného) je harmonickým priemerom svojich susedov a to znamená, že spomínaná **postupnosť je harmonická**.

6.5 Geometrické znázornenie známych priemerov

Úloha: Znázornite a odôvodnite vzťah medzi aritmetickým, geometrickým a **harmonickým** priemerom dvoch kladných reálnych čísiel: $\dfrac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Riešenie:
Vieme, že: $\overline{x_a} = \dfrac{a+b}{2}$, $\overline{x_g} = \sqrt{ab}$, $\overline{x_h} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$

Ľahko ukážeme, že $\forall\, a, b \in R^+$ platí:

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \,/ + 4ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$
$$(a+b)^2 \geq 4ab \,/ \sqrt{}$$
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

teda $\overline{x_g} \leq \overline{x_a}$.

Podobne: Pre $\forall\ a, b \in R^+$ platí:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 / ab$$

$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 \geq 0 / + 4a^2b^2$$

$$a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 \geq 4a^2b^2$$

$$ab.(a^2 + 2ab + b^2) \geq 4a^2b^2 / \sqrt{\ }$$

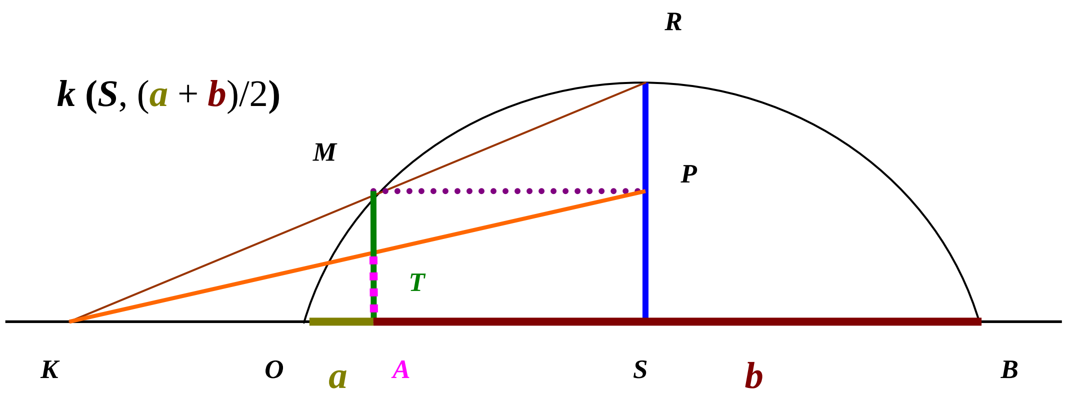
$$\sqrt{ab}.(a+b) \geq 2ab$$

$$\sqrt{a+b} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

teda $\overline{x_h} \leq \overline{x_g}$.

Tieto vzťahy môžeme aj znázorniť: **Aritmetický priemer** $\overline{x_a}$ (***a***, ***b***) je polovicou súčtu ***a*** + ***b***, t.j. (***a*** + ***b***)/2, graficky polovicou úsečky zloženej z dvoch úsečiek dĺžky ***a***, ***b***. **Geometrický priemer** $\overline{x_g}$ (***a***, ***b***) je druhou odmocninou súčinu veľkostí ***a***, ***b***, teda $\sqrt{a \cdot b}$, tam využijeme predstavu z Euklidovej vety o výške. Pre **harmonický priemer** získame predstavu úsečky ***TA*** dĺžky $\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$ využitím rovnoľahlosti v dolu uvedenom obrázku

(tam platí |***PS***| = √(a·b) = |***MA***|; $K = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{AB}$, $T = \overleftrightarrow{PK} \cap \overleftrightarrow{MA}$):



Z podobnosti (rovnoľahlosti) trojuholníkov *KAT* a *KSP*, trojuholníkov *KAM* a *KSR* platí:

$$\frac{|TA|}{|SP|} = \frac{|MA|}{|SR|}$$

po úprave tohto výrazu dostaneme

$$\frac{x}{\sqrt{a \cdot b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{\frac{a+b}{2}}$$

$$x = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} = |\boldsymbol{TA}|.$$

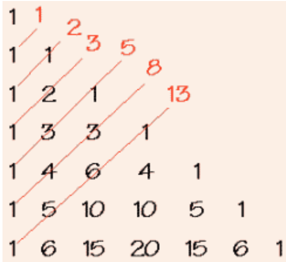
Aj geometricky sme znázornili, že pre každé dve kladné reálne čísla ***a***, ***b*** platí:

$$\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

a to znamená, že

$$\overline{x_h} \leq \overline{x_g} \leq \overline{x_a} \, .$$

7. Vnímavosť pre harmóniu



Pomerne známymi proporčnými pomermi z oblasti výtvarnej kultúry sú *brána harmónie – ianua harmoniae* (pomer veľkosti strany štvorca k veľkosti jeho uhlopriečky) a *zlatý rez – sectio aurea* (pomer, v ktorom je daná úsečka rozdelená na dve časti tak, že pomer veľkosti menšej časti k veľkosti väčšej je zhodný s pomerom veľkosti väčšej časti k veľkosti celej úsečky). Dôslednejšie pochopenie aj tu spomínanej harmónie, nám naznačuje nielen hlbšie historické korene matematických pojmov [1], [2], [5], ale aj ich zdôvodnenejšie vysvetľovanie v priebehu vyučovania školskej matematiky a prípadné používanie v aplikovaných matematických odboroch. Vnímanie harmónie nie je len estetickým alebo hudobným cítením, ale možno aj pomerne exaktným zdôvodnením matematicky zavedených užitočných základných pojmov. *Na svete neexistuje taká veda, ktorá dáva do pohybu toľko harmónie ako matematika.* Vtipným mužom, ktorý predvídal úžasnú praktickú použiteľnosť [4] mnohých matematických disciplín, bol *James J. Sylvester* (1814–1897), anglický matematik, stelesnená predstava toho, kto žije medzi ideálnymi číslami, vysoko nad problémami všedného dňa. *Svet nápadov, ktorý matematika obsahuje, je oslavou božskej krásy. Spôsob, akým matematika spája všetky svoje časti, je nekonečný poriadok a absolútny dôkaz pravdy, ktorou sa zaoberá.* Zušľachťovanie nášho myslenia matematickou kultúrou je príležitosť pre odhaľovanie skrytej harmónie, vymoženosť pre stále hlbšie, správnejšie a úplnejšie poznanie abstraktných súvislostí, intuitívny dotyk s mohutnosťou Toho, ktorý je nevyhnutná podstata, prvá príčina i večný zmysel.

Vo svojich motivačných zápiskoch zisťujem, že český matematik *Z. Frolík* (1933–1989) sa vyjadril aj takto: *Krása matematiky spočíva v jej harmónii. A nachádzanie harmónie je ... tým najhlbším zdrojom uspokojenia. Je to krása vnímateľná a vnímanie tejto krásy môže dať človeku náplň života. Túto krásu môže človek iba vnímať – a vôbec ju nemusí vytvárať. Skoro žiadny matematikár na gymnáziu vedecky nepracuje, ale každý by mal mať pre krásu matematiky vyvinutú vnímavosť.* Nezanedbateľným impulzom pre učiteľov matematiky v naznačovaní krásy i harmónie v školskej matematike by mohlo byť systematické vytváranie doplnkových stručných učebných a populárno–vedeckých textov z primeranej matematickej problematiky aj s historicko–kultúrnym pozadím doby a osudmi ľudí, ktorí ju tvorili. Ich pravidelné publikovanie by určite aspoň potešilo učiteľov aj ich žiakov.

Literatúra

[1] BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě.* Praha: Prometheus, 2001.

[2] JUŠKEVIČ, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1977.

[3] KOLMAN, A.: *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968.

[4] NEČAS, J. a kol.: *Aplikovaná matematika I.– II.* Praha: SNTL, 1977.

[5] ZNÁM, Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. Bratislava: Alfa, 1986.