

## Príprava na kombinatoriku

### Súbor úloh pre motiváciu

(pestrosť a obsah tematiky, primeraná náročnosť, didaktická významnosť, aplikovateľnosť)

1. Učiteľ konštatoval: Každý z mojich 31 žiakov si dopisuje s práve 15 spolužiakmi. Ktosi vykrikol: To je neuveriteľné. Mal pravdu?
2. Hokejový zápas skončil výsledkom 5 : 3. Koľko rôznych priebehov (sled gólov pre obe družstvá) mohol mať, ak po prvej tretine bolo 1: 1?
3. Vo vrecku máme 9 očíslovaných lístkov (1–9). Koľko je rôznych možností pre výber štyroch lístkov (zapisujeme si čísla vyťahnutých lístkov), ak
  - A. ich vyberáme postupne a lístky vraciame späť?
  - B. ich vyberáme postupne, ale nevraciam späť?
  - C. ak ich vyberieme naraz spolu?
4. Koľko je rôznych možností prideliť na kontrolu štyri rôzne televízory trom opravárom, ak požadujeme, aby
  - A. každý televízor prekontroloval práve jeden opravár?
  - B. každý opravár prekontroloval aspoň jeden televízor?
5. Koľko možností máme pre výber štvorčlennej posádky z desiatich kozmonautov, ak určití dvaja kozmonauti nemôžu letieť spolu?
6. Štyria hráči si rozdelia 28 (každému po sedem) rôznych doštičiek domina. Koľko je rôznych možností pre toto rozdelenie?
7. Máme práve  $n$  bielych rovnakých kociek a práve  $n$  iných navzájom rôznofarebných (nie bielych) tiež rovnakých kociek. Koľko je rôznych možností pre výber  $n$  kociek, ak záleží len na ich farbe. Koľko je rôznych možností pre usporiadanie všetkých  $2n$  kociek (záleží len na ich farbe)?
8. Koľko máme možností pre rozdelenie 8 jabĺk trom deťom, ak záleží len na počte jabĺk pre jednotlivé deti?
9. Koľko dvojíc  $[a, b]$ , kde pre  $a, b \in \mathbb{N}$  platí  $1 \leq a < b \leq 86$ , má súčin  $(a \cdot b)$  deliteľný tromi?
10. Množina  $L$  má  $n$  rôznych prvkov. Koľko existuje na množine  $L$  rôznych relácií:
  - A. binárnych?
  - B. reflexívnych?
  - C. symetrických?

### Náznak riešenia a výsledky:

1.  $\{31 \cdot 15 \text{ nie je deliteľné dvomi bez zvyšku; áno}\}$  2.  $\{2 \cdot C_2(6) = 30\}$
3.  $\{9^4; \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6; \frac{9!}{5!4!}\}$  4.  $\{V'_4(3) = 3^4; 15^3\}$
5.  $\{2 \cdot C_3(8) + C_4(8) = C_4(10) - C_2(8) = C_4(9) + C_3(8) = 182\}$
6.  $\{C_7(28) \cdot C_7(21) \cdot C_7(14) = 28! / (7!)^4\}$
7.  $\{\text{vyberáme postupne niekoľko prvkové podmnožiny farebných kociek a do počtu } n \text{ doplníme bielymi kockami, teda } C_0(n) + C_1(n) + \dots + C_{n-1}(n) + C_n(n) = 2^n; \frac{(2 \cdot n)!}{n!}\}$
8.  $\{P'_{2,8}(10) = C_2(10) = C'_8(3) = 45\}$
9.  $\{z \text{ čísel od } 1 \text{ do } 86 \text{ je ich deliteľných tromi práve } 28, C_2(86) - C_2(86 - 28) = 2002\}$
10.  $\{2^{n^2}; 2^{n \cdot (n-1)}; 2^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}\}$

## Štandardný výber úloh z kombinatoriky

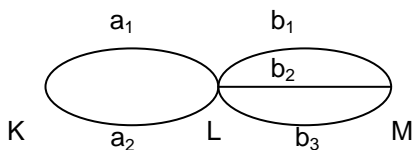
Jednou z možností ako prispieť k obľube klasickej kombinatoriky je presvedčiť sa o pochopení jej základných pojmov a presvedčivo vedieť riešiť s patričným nadhľadom základné typy kombinatorických úloh. Na tento účel ponúkam zdôvodnený výber zadaní, ktorý umožní vyskúšať si vyberanie a usporadúvanie objektov požadovaných vlastností a postup pre určenie ich počtu.

### Vypisovanie možností, systém

1. Vypíšte všetky trojčiferné čísla, ktorých ciferný súčet je štyri.
2. Vypíšte možnosti, ktoré majú dve dievčatá, vybrať si do tanca z piatich chlapcov.

### Pravidlá súčtu a súčinu

1. Na obr. sú vyznačené cesty medzi mestami K, L, M.



Koľkými rôznymi cestami sa možno dostať z L buď do K alebo do M? Koľkými rôznymi cestami sa možno dostať z K do M?

2. Koľkými rôznymi spôsobmi sa dá zafarbiť kocka dvomi rôznymi farbami, ak má byť každá stena jednofarebná?
3. Koľko rozličných dvojíc pohľadnica – známka možno zostaviť z piatich druhov pohľadníc a štyroch druhov známok?
4. Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť 6 detí na tri dvojice (nezáleží na poradí)?

### Variácie bez opakovania prvkov

1. Koľko rôznych umiestnení môže byť na prvých troch miestach v súťaži, ktorej sa zúčastňuje osem družstiev?
2. V triede je  $m$  miest. Koľko rôznych možností máme pre ich obsadenie  $p$  žiakmi ( $p \leq m$ )?

### Variácie s opakovaním prvkov

1. Koľko trojčiferných čísel sa dá napísať pomocou nepárnych číslíc?
2. Koľko značiek z Morseovej abecedy ( $\cdot$  ;  $-$ ) možno utvoriť, keď zostavujeme bodky a čiarky do skupín s jedným až štyrmi prvkami?

### Permutácie bez opakovania prvkov

1. Koľko je rôznych možností, pre zoradenie ôsmich ľudí vedľa seba?
2. Medzi ôsmimi rôznymi knihami sú tri rôzne romány. Koľko je možností pre ich usporiadanie vedľa seba, ak požadujeme, aby historické romány boli vedľa seba?

### Permutácie s opakovaním prvkov

1. Krotiteľ má pripravené vystúpenie so štyrmi levmi, dvomi tigrami a tromi leopardami. Koľkými rôznymi zástupmi (záleží len na druhu zvierat) ich môže priviesť do arény?
2. Koľko rôznych desiat písmenových slov možno zostaviť pri použití všetkých písmen slova MATEMATIKA?

### Kombinácie bez opakovania prvkov

1. Koľko rôznych odtieňov môžete získať z deviatich rôznych farieb, ak zmiešate v tom istom pomere buď dve alebo tri farby?
2. Koľko je možností pre rozdelenie pätnástich pacientov na operácie do troch rôznych nemocníc, ak v každej nemocnici má byť na operáciu rovnaký počet pacientov?

### Kombinácie s opakovaním prvkov

1. Koľko možností máme pre výber dvanástich pohľadníc z deviatich druhov (z každého druhu je dostatok pohľadníc)?
2. Koľko je možností rozdeliť 13 banánov štyrom chlapcom (záleží im len na počte banánov) tak, aby každý z nich dostal aspoň dva banány?

### So štipkou vtipu

1. Koľko je rôznych možností pre postavenie piatich rôznych figúrok na šachovnicu (8 x 8), aby dve boli na bielych a tri na čiernych políčkach?
2. Koľko možností je pre osvetlenie miestnosti, v ktorej je sedem rozličných lúčok so samostatnými vypínačmi?
3. Koľko je možností pre rozdelenie 8 chlapcov a 4 dievčat do dvoch družstiev po 6, ak v každom družstve má byť aspoň jedno dievča?
4. Koľko máme rôznych možností prideliť na kontrolu štyri rôzne televízory trom opravárom, ak chceme, aby každý televízor prekontroloval aspoň jeden z nich?
5. Koľko je rôznych možností rozsadiť okolo okrúhleho stola s očíslovanými miestami 5 mužov a 5 žien tak, aby žiadne dve osoby rovnakého pohlavia nesedeli vedľa seba?
6. Koľko je rôznych možností ako rozložiť 10 rôznotitulových kníh vedľa seba na 5 políc (na každú policu sa zmestia aj všetky knihy)?
7. Koľko rôznych riešení má rovnica  $x + y + z = 4$  v  $Z_0^+$ ?
8. Koľko je možností usporiadať vedľa seba  $n$  čiarok a  $m$  bodiek tak, aby žiadne dve bodky neboli bezprostredne vedľa seba?
9. Na pošte sa triedia listy podľa mesta určenia do ôsmich priehradiek. Koľko je rôznych možností roztriedenia pre 12 listov (záleží len na počte listov do rôznych priehradiek)?

### Príležitosť na riešenie viacerými postupmi

1. Koľko rôznych trojčlenných hliadok môžeme zostaviť z 12 vojakov, ak jeden z trojice má byť veliteľ?
2. Aký je počet všetkých možných rozdelení desiatich osôb podľa ich krvných skupín (A, B, AB, 0)?
3. Z desiatich manželských párov vyberáme päť osôb. Koľko je všetkých takých päťíc, že v nich nie je ani jeden manželský pár?

### Výber úloh z kombinatoriky

1. Koľko je rôznych možností pre rozmenenie desaťkoruny pomocou jednokorún, dvojkorún a päťkorún?
2. Na turnaji sa zúčastnilo päť družstiev A, B, C, D, E. V koľkých prípadoch sa družstvo A mohlo umiestniť v celkovom poradí medzi družstvami B a C?
3. Koľko je rôznych možností zaradiť 10 detí do piatich dvojíc (záleží len na tom, kto je s kým vo dvojici, na poradí dvojíc nezáleží)? Koľko je možností, ak sa chcú deti prechádzať v piatich za sebou idúcich dvojiciach (na poradí dvojíc už záleží)?
4. Koľko je rôznych rozsadení pre päť dievčat usedajúcich vedľa seba, ak dve z nich sú sestry, ktorým vyhovieme, aby sedeli vždy vedľa seba?
5. Koľko je šesťmiestnych prirodzených čísel neobsahujúcich cifry 2 a 7?
6. Koľko je rôznych možností pre 5 dievčat a 4 chlapcov sadnúť si v kine do jedného radu bezprostredne vedľa seba tak, aby žiadni dvaja chlapci nesedeli vedľa seba?
7. Koľko je možností vybrať zo 7 mužov a 4 žien šesťčlennú skupinu, v ktorej sú aspoň tri ženy?
8. Koľko rôznych priamok je určených desiatimi rôznymi bodmi, ak práve tri z nich ležia na jednej priamke?
9. Koľko prirodzených čísel menších ako 5000 je možné vytvoriť z číslíc 0, 3, 4, 5 ak sa žiadna cifra neopakuje?

10. Počet uhlopriečok konvexného  $n$ -uholníka je o 26 menší ako počet uhlopriečok konvexného  $(n + 4)$ -uholníka. Stanovte počet strán oboch mnohoúhelníkov.
11. Na tanečnom večierku je 12 dievčat a 15 chlapcov. Koľko je možností vybrať z nich štyri páry (ch–d) na tanec?
12. Koľko prirodzených čísel menších ako  $10^5$  možno napísať len pomocou cifier 7 a 9?
13. Koľko je možností vybrať na šachovnici ( $8 \times 8$ , a-h, 1-8) tri polia tak, aby nemali všetky tri naraz rovnakú farbu?
14. Koľko je rôznych možností, aby pri hode šiestich rôznofarebných hracích kociek padli práve štyri rovnaké čísla?
15. Koľko je šesťciferných prirodzených čísel, ktorých ciferný súčet je štyri?
16. Koľko je možností pre rozdelenie 7 ruží a 5 tulipánov trom dievčatám (záleží im len na počte ruží alebo tulipánov) ?
17. Určte počet všetkých trojčiferných prirodzených čísel zostavených z cifier 0, 2, 5, 7 (cifry sa môžu opakovať), ktoré sú deliteľné číslom 9?
18. Z desať študentov má prísť do kabinetu aspoň sedem. Koľko rôznych možností pri tom môže vzniknúť?
19. Koľko je rôznych možností pre rozdelenie 8 chlapcov a 4 dievčat do dvoch šesťčlenných volejbalových družstiev tak, aby v každom družstve bolo aspoň jedno dievča?
20. Koľko rôznych slov možno získať zamenou poradia písmen slova PROTOPLAZMA tak, aby žiadne dve samohlásky neboli vedľa seba?
21. Koľko prvkov treba vziať, aby sa z nich dalo utvoriť 1444 kombinácii tretej triedy bez opakovania, ktoré obsahujú aspoň jeden z dvoch zvolených prvkov?

Pre povzbudenie do čínorodej práce so školskou kombinatorikou pripomínam ruské príslovie:

*Boh nám dáva orechy, ale ich neroztĺka.*

