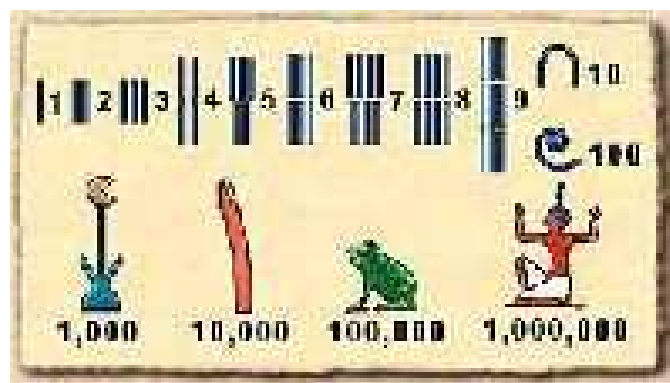




Dušan JEDINÁK

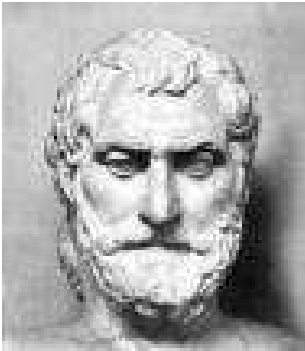
O starovekých matematikoch

(Táles, Pytagoras, Euklides, Archimedes, Diofantos)



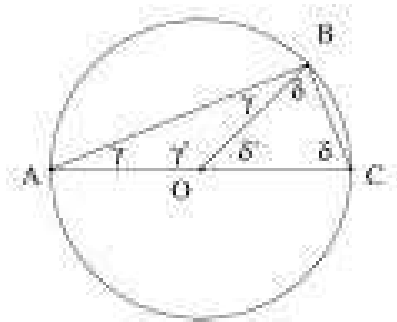
TÁLES z Milétu

Egyptský kňaz a mladý kupec **Táles z Milétu** stáli za slnečného dňa neďaleko pyramídy a uvažovali o určení jej výšky. **Táles** sa pousmial: *Zmeriam výšku pyramídy. Kňaz sa nedôverčivo spýtal: „Ako?“ Ak bude môj tieň práve taký dlhý ako je moja telesná výška, tak v tom okamihu musí merať dĺžka tieňa pyramídy práve toľko, ako je vysoká pyramída.* Jednoduchosť riešenia skrývala matematickú podstatu podobnosti trojuholníkov. O nej už vtedy **Táles** vedel.



Jedným zo starogréckych mudrcov, slávnych ľudí s praktickou životnou múdrosťou, politickou prezieravosťou a morálnymi kvalitami, bol **Táles** (asi 624–547 pred n. l.). Narodil sa v Miléte – meste ruží, na pobreží Malej Ázie. Túžba po poznaní súvisela s jeho kupeckým povoláním (obchodoval s olejom a soľou). Veľa cestoval a poznával. Najviac v Egypte, ale možno aj Babylone. V staršom veku sa zamýšľal nad poznanými prírodnými javmi a snažil sa ich usporiadať do nejakého systému a odvodiť z jednotného princípu. Chcel dôjsť od zrejmych tvrdení k menej zrejmych rozumovou úvahou. Také poznanie ho očarovalo, začal milovať múdrosť, stal sa filozofom.

Táles vypočítal, koľko má rok dní, poznal výsledky astronomických pozorovaní tak dobre, že dokázal prvý v histórii predpovedať zatmenie slnka v roku 585 pred našim letopočtom. **Táles** začal klásť na vtedajšie matematické poznatky požiadavku dôkazu. Chcel získať základ pre odôvodnenie menej zrejmych poznatkov. Napríklad vedel, že v rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základni zhodné a tiež, že dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v strane a príslahlých uhloch. Poznal, že súčet uhlov v trojuholníku sa rovná dvom priamym uhľom. Dokázal, že uhol vpísaný do polkruhu je pravý – dnes je to *Tálesova veta*.



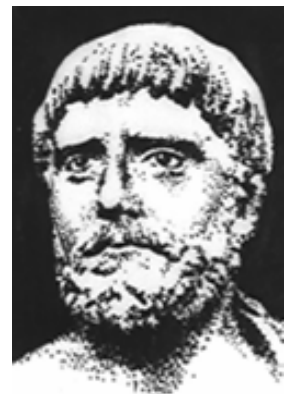
Táles bol človek praktický, šikovný technik, obchodník a cestovateľ. Zostrojil diaľkomer na určenie vzdialenosti lode od brehu. Spoznal elektrickú príťažlivosť jantáru, ak sa trel látkou, skúmal magnetické vlastnosti niektorých železných rúd. Mal veľa skúseností a patril k prvým, ktorí chceli poznať odpoveď nielen na otázku „ako sa to počíta?“, ale aj „prečo práve tak?“.

Táles založil Milétsku školu iónskych filozofov, ktorí sa snažili, rozumne a logicky, vysvetliť pozorované prírodné javy a dovtedajšie poznatky. Domnievali sa, že pralátkou, z ktorej je všetko zložené, je voda. Začali tým postupne vytvárať svetonázor – pohľad na svet ako celok, ktorý má zmysel. Ukazovali ostatným cestu pre rozumové uvažovanie. **Táles z Milétu** dostal označenie *prvý filozof, fyzik, matematik a astronóm*.

Už za jeho čias ľudia „ohovárali“ filozofov i matematikov. Napríklad o Tálesovi rozširovali takúto príhodu: Vraj raz, keď pri chôdzi pozoroval hviezdy, spadol do studne. Jazyčná deva sa nezdržala – *Chcel vedieť, čo sa deje na nebi, a zabudol, čo má pod nohami.*

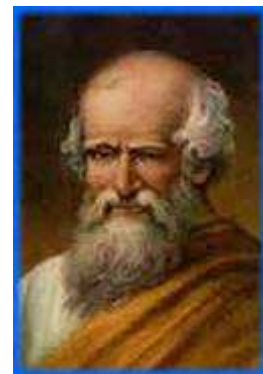
Táles zomrel ako vážený občan. Ďalšia legenda, lebo naše poznatky z tej doby sú len veľmi približné a neisté, hovorí, že na jeho hrobe, bol nápis: *Malý hrob, ale veľká sláva tohto kráľa astronómov medzi hviezdami.* Aj to naznačuje, že **Táles z Milétu** zanechal hlbokú stopu vo vedomí ľudí túžiacich po pravom poznaní.

(dmj)

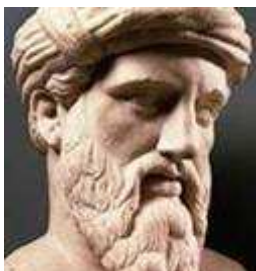


PYTAGORAS zo Samu

Neveľa matematických poznatkov z učiva základnej školy je pomenovaných po významných matematikoch. *Pytagorova veta* je asi najznámejšia: *Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad oboma odvesnami.* Budete sa čudovať, ale to, že v trojuholníku so stranami 3, 4, 5 je oproti najdlhšej strane pravý uhol, vedeli v Babylone a Egypte už pred 4000 rokmi. Prečo tento poznatok nesie meno gréckeho filozofa a matematika, ktorého volali **Pytagoras** (asi 570–496 pred n. l.)? Asi on zovšeobecnil formulovanie vety aj s jeho správnym odôvodnením. Dodnes sa prirodzené čísla x , y , z , ktoré vyhovujú vzťahu $x^2 + y^2 = z^2$ nazývajú „*pytagorovské*“.



Pytagoras sa narodil na ostrove Samos, ležiacom v Egejskom mori pri brehoch Malej Ázie. O jeho živote vieme veľmi málo. Z rôznych správ tušíme, že putoval po Egypte, žil v Babylone a Perzii, a možno navštívil aj Indiu. Po získaní skúseností sa usadil na Krotone v južnom Taliansku a založil tam filozofickú školu, náboženský spolok i politickú organizáciu v jednom celku. Jej príslušníci sa neskôr nazývali *pytagorovci*. Zamýšľali sa nad spôsobom života, hľadali správne miery v rôznych ľudských činnostiach.



Pytagoras pochopil svet prirodzených čísel ako riadiaci princíp vesmíru. Fascinovala ho harmónia čísel, vytvoril zaujímavé číselné pojmy a odhalil ich vlastnosti. (Napríklad *dokonalé čísla* – sú také prirodzené čísla, ktoré sa rovnajú súčtu svojich vlastných deliteľov. Napríklad $6 = 1 + 2 + 3$, alebo $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Aj čísla **496** a **8128** sú dokonalé. A kedy sú dve čísla *spriaznené*? Ak sa navzájom rovnajú súčtu deliteľov toho druhého. Napríklad 220 a 284. Overtite si to!

Pravdou je, že pytagorovci to s úctou k tajomstvám číselného sveta prehnali až k mysticismu a mágii. Ale prišli až na to, že pomery prirodzených čísel nevystačia ani na vyjadrenie uhlopriečky štvorca pomocou jeho strany. Odhalili, že $\sqrt{2}$ sa nedá vyjadriť ako podiel dvoch prirodzených čísel. Vlastnou metódou prekonalí svoje ilúzie.

V pytagorovskom bratstve študovali nielen matematiku, ale aj astronómiu, medicínu, teóriu hudby a filozofiu. Hlásali, že Zem má tvar gule a otočí sa za deň raz okolo svojej osi. Odhalili vzťahy medzi harmóniou v hudbe a matematikou. Vedeli, že pomer dĺžky struny a výšky tónu možno vyjadriť v pomere prirodzených čísel.

Slávny **Pytagaros zo Samu** nám zanechal aj pre dnešnú dobu zaujímavé a podnetné postrehy:

- *Pravé a dokonalé priateľstvo znamená spojiť veľa vecí a tiel do jedného srdca a jediného ducha.*
- *Najkratšie odpovede – áno a nie – vyžadujú najdlhšie rozmýšľanie.*
- *Mlč, alebo povedz niečo, čo je lepšie ako mlčať.*
- *Boh dal človeku dve ruky, aby ho neobťažoval a každou maličkosťou.*



Pytagoras zomrel v pomerne vysokom veku 74 rokov v Metaponte. Sám nič nezapísal zo svojej teórie. Jeho myšlienky šírili jeho žiaci. Ukazovali myslenia ako cnosť a odhaľovali túžbu poznávať podstatu vecí a javov. Pytagorovo meno zostane natrvalo zapísané do základov matematickej kultúry civilizovaného ľudstva.

(dmj)

EUKLIDES z Alexandrie

Ktorá kniha po Biblii je na svete najrozšírenejšia? Nečudujte sa, ale sú to matematické *Základy*, ktorých autorom je grécky geometer **Euklides** (asi 340–287 pred n. l.). Boli napísané okolo roku 300 pred našim letopočtom, to znamená pred viac ako 2200 rokmi. Odvtedy vyšli v rôznych svetových jazykoch vo viac ako tisíc vydaniach a vo veľkých nákladoch. Až donedávna sa mnohé stredoškolské učebnice v rôznych krajinách veľmi podobali na klasické *Základy*.



O Euklidovom živote vieme veľmi málo. Pravdepodobne sa narodil v Aténach okolo roku 340 pred n. l. Patril k žiakom filozofa Platóna. Za vlády egyptského kráľa Ptolemaia I., ktorý vládol v rokoch 306–283 pred n. l., **Euklides** založil a viedol v Alexandrii matematickú školu. Tu okolo roku 300 pred n. l. zhrnul vtedajšie geometrické poznatky, obohatil ich vlastnými matematickými výsledkami a usporiadal do znamenitého diela *Stoicheia – Základy*. Táto práca sa stala jedinou učebnicou matematiky na celé stáročia. Traduje sa, že keď sa kráľ Ptolemaios I. spýtal Euklida, či k hlbšiemu poznaniu matematiky nevedie ľahšia a kratšia cesta ako cez jeho *Základy*, vraj dostal takúto odpoveď: *Ani pre kráľa niet lepšej cesty ku geometrii*.

Matematici Pappos (druhá polovica 3. stor.) a Proklos (410–485) nám vo svojich komentároch k *Základom* zanechali poznámky o samotnom Euklidovi: Bol to vraj muž jemného charakteru, skromný a nezávislý. V alexandrijskej škole vyučoval pod vplyvom Platónovej filozofie aritmetiku, geometriu, harmóniu (teóriu hudby) a astronómiu. Matematickým poznatkom zhromaždeným do jeho doby dal prísnu logickú štruktúru a presnú formu. K úspechom matematickým si pripísal i zásluhy pedagogické. Stal sa učiteľom pre zástup priateľov matematiky celých tisícročí.

Dielo *Základy* (latinsky *Elementa*, grécky *Stoicheia*) sa skladá z 13 kníh. Sú v nich vysvetlené základy planimetrie, stereometrie, geometrie a geometrickej algebry. Celá práca je budovaná podľa jednotnej logickej schémy. Každá kniha sa začína definovaním – objasnením, názorným popisom všetkých geometrických objektov. Za nimi nasledujú *postuláty* – konkrétne vlastnosti geometrických útvarov i *axiómy* – výpovede o vlastnostiach negeometrických veličín. Potom sú uvedené matematické vety. Každá z nich je najprv sformulovaná, potom sa konštatuje, čo je dané a čo treba dokázať. Nasleduje dôkaz so všetkými odkazmi na predchádzajúce vety, postuláty a axiómy.

V Euklidových časoch sa matematika chápala ako cesta k preniknutiu do filozofie, ako umenie systematickým myšlienk. O tom, že takto chápal svoju vedu aj **Euklides**, svedčí táto príhoda: Istý žiak sa pri vyučovaní spýtal Euklida: *Aký zisk budem mať, ak sa túto poučku naučím?* **Euklides** zavolať otroka a rozkázal: *Dajte mu tri oboly (vtedajšie peniaze), lebo tento človek musí zarábať tým, čo sa učí.* Aké je z príhody poučenie? Matematické poznatky majú okrem materiálneho úžitku aj cenu krásy ľudskej myšlienky.

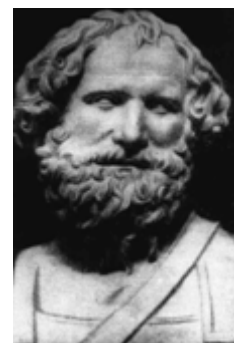
Euklides z Alexandrie dovŕšil mohutné matematické dielo predchádzajúcich generácií a vytvoril vo svojich *Základoch* knihu, ktorá bola pre ľudstvo užitočná dlhšie ako 2000 rokov. Už to stačí, aby sme ho nielen spomínali, ale niektoré z jeho matematických myšlienok aj dobre poznali.



(dmj)

ARCHIMEDES zo Syrakúz

Najvýznamnejší občan mesta na ostrove Sicília v Stredozemnom mori je nesporne človek, ktorého považujú za najúžasnejšieho počtárskeho umelca všetkých čias. Grécky matematik a fyzik **Archimedes** (asi 287– 212 pred n. l.), geniálny učenec a vynálezca staroveku, sa narodil i zomrel v Syrakúzach. Pochádzal zo vzdelanej, neveľmi bohatej rodiny astronóma Feidia. **Archimedes** študoval v Alexandrii, v centre vtedajšej vedy. Pod vplyvom Euklidových nasledovníkov sa oddal bádaniu v matematike, mechanike a konštrukcii strojov. Svojimi premyslenými technickými nápadmi na poli praktického využitia matematiky a mechaniky sa zapísal do dejín ľudského poznania.



Sicílsky vládca Hieron sa chcel presvedčiť o rýdzosti svojej zlatej kráľovskej koruny. Za úlohu to dostal **Archimedes**. Ten vyvážil korunu rýdzi zlatom a potom znovu rýdzim striebrom. Položil zlato vážiace ako koruna do nádoby s vodou a označil si jej výšku. Potom to isté urobil so striebrom. Nakoniec ponoril do tej istej nádoby s vodou aj kráľovskú korunu. Pretože voda vystúpila vyššie, ako keď v nej bolo ponorené iba rýdze zlato, ale nižšie, ako keď v nej bolo iba striebro, znamenalo to, že kráľovská koruna bola zo zliatiny zlata a striebra. Archimedova bystrosť odhalila nepoctivosť kráľovského zlatníka.

V zachovaných spisoch je zaznačená iba časť Archimedových objavov a vedomostí. Ako zdatný počtár vypočítal obvod a plochu kruhu pomocou polomeru a určil približnú hodnotu pomeru obvodu kruhu k jeho priemeru – dnes ju značíme ako číslo π . Pomocou pravidelného 96 – uholníka vpísaného a opísaného ku kružnici, určil π ako $22/7$. Dokázal, že plocha kruhu sa rovná ploche trojuholníka s výškou rovnajúcou sa polomeru a so základňou rovnajúcou sa obvodu kruhu. Rozdelením plochy ohraničenej uzavretou krivkou na malé obdĺžniky a sčítaním ich plochy odhalil spôsob určovania plôch nepravidelných rovinných útvarov. Vypočítal aj povrch a objem gule i elipsoidu. Zistil, že pomer objemov rovnostranného valca, gule a kužeľa vpísaných do tohto valca sú v pomere 3:2:1. Metóda, ktorú Archimedes požíval pri odvodzovaní povrchov a objemov, sa v podstate zhoduje so základnými princípmi integrálneho počtu.



Archimedes objavil zákon páky, podľa ktorého sily pôsobiace na páke pri rovnováhe sú nepriamo úmerné dĺžkam ich ramien. Dokázal tým, že nepatrnou silou možno uviesť do pohybu veľké bremeno. Svoje poznatky uplatnil pri konštrukcii mohutných kladkostrojov a vojenských vrhacích mechanizmov, Tie použil pri obrane rodných Syrakúz.

Archimedes prvý definoval ťažisko telesa a pochopil dnešný pojem momentu sily. Zhotovil „nekonečnú skrutku“, ktorú využívali v staroveku aj ako vodné čerpadlo a v podstate je dodnes súčasťou napríklad obyčajného mlynčeka na mäso.

Určite poznáte *Archimedov zákon* o vztlaku ponoreného telesa v kvapaline. Ten bol súčasťou jeho spisu *O plávajúcich telesách*. Tam **Archimedes** vybudoval základy hydrostatiky a pochopil význam pojmu hustota.

Historické tradície pripisujú Archimedovi výroky:

- *Heuréka* – našiel som to, pri objavení spôsobu, ako určiť hustotu telies ponorených do kvapaliny.
- *Dajte mi pevný bod a pohnem Zemou* – vyjadruje odraz hlbokej viery o možnostiach jeho mechanizmov.
- *Nedotýkaj sa mojich kruhov* – slová pred tým, ako ho zavraždil rímsky vojak.

Hlbšie poznanie Archimedovho diela bude výrazom úcty a obdivu k jeho poznatkom a objavom.

(dmj)

DIOFANTOS z Alexandrie

Životopisné údaje o Diofantovi sú veľmi skúpe. Vie sa, že žil za panovníka Juliana v Alexandrii okolo roku 250. Možno bol Babylónčan a pochádzal z Mezopotámie. Zachovalo sa však šesť kníh, z 13 napísaných, pod názvom *Aritmetika*. Je to zbierka 189 rôznych vyriešených úloh. Zaujímavé na nich je to, že **Diofantos** tam neznámu veličinu označoval jedným symbolom a používal skrátene slová a znaky, ktoré zjednodušovali zápis matematických operácií (napr. zaviedol symbolické označenie aj pre druhú a tretiu odmocninu). Už vtedy sa pozeral na čísla nezávisle od geometrickej predstavy a tým pripravoval cestu pre algebru, pre vytvorenie a zápis jednoduchých algoritmov. Medzi jeho úlohami je veľa takých, ktoré dnes patria medzi *neurčité rovnice*. **Diofantos** vedel odvážnymi užitočnými substitúciami obratne jednotlivé prípady vyriešiť. Ako výsledky ho zaujímali iba kladné celé čísla a zlomky. Často mu stačilo, keď našiel iba jedno riešenie.

Diofantos odhalil aj niektoré zaujímavé vety z aritmetiky celých čísel. Poznal identitu $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (xv - zu)^2 = (xu - yv)^2 + (xv + zu)^2$. Vedel dokázať, že každý štvorec možno „zložiť“ ako súčet dvoch štvorcov. Ako to vyjadríme dnes? Pre každé a^2 platí

$$a^2 = \left(\frac{2am}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{a(m^2 - 1)}{m^2 + 1}\right)^2, \quad m \text{ je ľubovoľné číslo, väčšie ako jedna.}$$

Pozrite si nápad, z ktorého to vychádza: Hľadáme $x \neq 0$, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + (mx - a)^2 \\ a^2 &= x^2 + m^2 x^2 - 2amx + a^2 \\ x^2 + m^2 x^2 - 2amx &= 0 \\ x(x + m^2 x) &= 2amx \\ x + m^2 x &= 2am \\ x &= \frac{2am}{m^2 + 1}, \end{aligned}$$

potom môžeme vyjadriť $mx - a = \frac{2am^2}{m^2 + 1} - a = \frac{2am^2 - am^2 - a}{m^2 + 1} \Rightarrow (mx - a) = \frac{a(m^2 - 1)}{m^2 + 1}$

Na legendárnom náhrobku bol údajne tento epigram:

*Hľa, tento náhrobok stojí nad pozostatkami Diofanta.
Jeho vek udáva tento kameň a jeho diela.
Zeus mu dal ako chlapcovi šestinu jeho života,
potom za dvanástinu veku začala mu tvár zarastať.
K tomu sedmina jeho veku a už mu fakte svadby žiarili.
Päť rokov nato ho bohovia pekným synčekom obdarili.
Nešťastné dieťa s takou vrúcnou láskou milované!
Žiaľ, ni polovicu otcovho veku nedosiahlo, keď ťa Hades prijal.
Štyri roky uspokojuje ešte otec bolesť umením čísel,
keď konečne sám k cieľu svojho žitia prišiel.*

Tento veršovaný životopis sa nachádza v tzv. *Palatinskej antológii* z pera Metrodora v 6. storočí. Už poznáte Diofantov vek?



Diofantos z Alexandrie začal používať skratky a zvláštne znaky, aby stručnejšie vyjadril potrebné vzťahy v slovo-geometrickom vyjadrovaní. Jeho aritmetika zažiarila aj po stáročiach ako vtipná pomôcka pri riešení rovníc pomocou „finty“ – vhodnej substitúcie. Možno tak záhadne vyjadril spojenie gréckej jednoduchej funkčnosti a arabským zmyslom pre symetriu. *Rozmanitosť jeho postupov pre rôzne problémy skôr oslňuje ako teší. Bol bystrý a šikovný virtuóz, ale podľa všetkého nie dosť uspôsobený na to, aby chápal podstatu svojich metód, a tým dospel k všeobecnosti* (M. Kline). **Diofantos** urobil veľký krok od geometrickej predstavy ku symbolickej algebre, stal sa Euklidom algebry.

Diofantos z Alexandrie pripravil podnetné dielo gréckorímskeho staroveku, ktorým zboril ohraničenia medzi slovnou algebrou a geometriou a nastúpil cestu účinných symbolických zápisov. Úspešných pokračovateľov našiel až potom, keď vyšlo roku 1575 jeho dielo preložené do latinčiny. **Diofantos** bol prvým matematikom – priekopníkom algebraických zápisov, ktorý zrejme vytušil, že symbolické vzorce môžu za nás aj „trochu myslieť“.

(dmj)