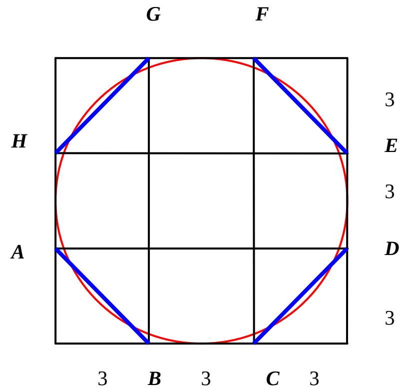
TRANSFORMÁCIA Z HISTÓRIE MATEMATIKY DO DIDAKTIKY

Úvod

Dejiny matematiky poskytujú veľa dokladov o pestrej a všestrannej ľudskej myšlienkovej aktivite, ktorá v priebehu tisícročí vytvorila monumentálnu stavbu matematickej kultúry [8]. Základnou povinnosťou zodpovedných učiteľov matematiky je ukázať študentom aspoň fragmenty z histórie matematického myslenia, ktoré môžu zvýrazniť intelektuálnu hodnotu takto budovanej ľudskej civilizácie. Aj školská matematika potrebuje hlbšie podnety i poznatky z dejín matematiky. Vybrané kapitoly z tejto oblasti treba systematicky zaraďovať nielen do didaktických učiteľských predmetov, ale aj ako integrálnu súčasť prednášaných jednotlivých matematických disciplín [3]. Prezident Indickej matematickej spoločnosti (2007) R. B. Bavat veľmi sympaticky vyjadril pestrosť prístupu ku školskej matematike: *Na hodinách matematiky môžu a mali byť mať svoje miesto všetky stránky matematiky, včítane jej histórie, životopisov, motivácií, definícií, viet, dôsledkov, dôkazov, príkladov, protipríkladov, hypotéz, konštrukcií, výpočtov i aplikácií.*

Pripravil som sedem stručných ukážok ako možno spracúvať poznatky z histórie do vyučovania školskej matematiky.

- **Aj na papyrusoch hľadali číslo „pí”**



Papyrusový zvitok (nájdený roku 1858), získaný škótskym kupcom starých písomností H. Rhindom, uložený v Britskom múzeu v Londýne, prezývaný aj ***Ahmesov papyrus***, obsahuje 84 matematických úloh a ich riešenie. Text začína takto: *Presné počítanie – vstup do znalostí všetkých existujúcich vecí a všetkých temných záhad…* Toto dielo písal *Ahmes* okolo roku 1650 pred n. l. ako opis spisu z obdobia rokov 2000 až 1800 pred n. l. a možno niektoré poznatky sú až z časov stavby pyramíd od *Imhotepa* okolo roku 2800 pred n. l.

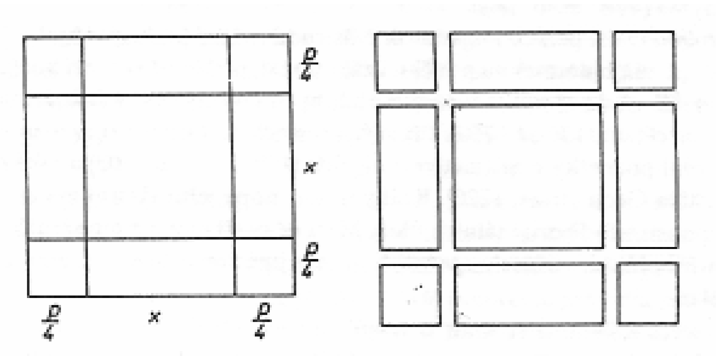
V jednej úlohe sa predpokladá, že obsah kruhu s priemerom 9 jednotiek je rovnaký ako obsah štvorca so stranou dlhou 8 jednotiek. Možno to vysvetliť takto: Ak danej kružnici, napr. s priemerom $d = 9$, opíšeme štvorec a rozdelíme stranu štvorca na tri časti (pozri obr.), dostaneme 9 menších štvorcov, tak môžeme „vytvoriť“ v rohoch veľkého štvorca trojuholníky, aby sme dostali osemuholník *ABCDEFGH*. Obsah plochy osemuholníka sa príliš nelíši od obsahu plochy kruhu vpísaného do štvorca. Obsah osemuholníka je zhodný s obsahom piatich menších štvorcov sčítaných s obsahom štyroch trojuholníkov v rohoch $[5\cdot3^2 + 4\cdot(9/2) = 45 + 18 = 63]$. To je približne $64 = 8^2$. Tak sa dá obsah kruhu s priemerom 9 jednotiek približne odhadnúť ako obsah štvorca o strane 8 jednotiek. Potom (v našom zápise) je obsah kruhu $\pi\cdot(9/2)^2 = 8^2$ a teda pre nich $\pi = (64\cdot4)/81 = 4\cdot(8/9)^2 = (16/9)^2 = 3{,}16049\ldots$ Potom sa už nečudujeme, že Egypťania tejto doby mali $\boldsymbol{\pi = (16/9)^2}$ a počítali obsah kruhu podľa vzťahu $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, kde d bola dĺžka priemeru tohto kruhu (π je podiel obvodu kruhu k dĺžke jeho priemeru).

- **Regula falsi – falošný predpoklad**

Už veľmi dávno v egyptskej škole (sú o tom doklady na zachovaných papyrusoch z 18. storočia pred naším letopočtom) riešili úlohu: *Celok a jeho štvrtina dávajú 15. Koľko je celok?* Zachoval sa tento návod: *Počítaj so štyrmi, k tomu musíš pridať štvrtinu, teda jednu; spolu je to 5. Vydeľ 15 piatimi, dostaneš tri. To vynásob štyrmi. Hľadané množstvo celku je 12.* V dnešnej dobe by sme postup zapísali a vysvetlili takto: $x + (x/4) = 15$, nech $x = 4\cdot k$, potom $4\cdot k + (4\cdot k)/4 = 15$, teda $k = 15/5 = 3$, ale to znamená, že $x = 4\cdot3 = 12$. Takýto postup dnes nazývame **metóda falošného predpokladu – regula falsi.** Uplatňujeme ho napríklad aj pre približné určenie koreňov rovnice $f(x) = 0$ metódou tetív alebo dotyčníc.

- **Stredoveká geometrická predstava o riešení kvadratických rovníc**

Al–Chvárizmí (okolo 780–850) si vedel predstaviť postup pre riešenie kvadratickej rovnice $\boldsymbol{x^2 + p \cdot x = q}$, kde p, q sú kladné reálne čísla, pochopením a využitím tohto obrázku:



Obsah prostredného štvorca je x^2, menšie štvorce majú každý obsah $(p/4)^2$, obdĺžniky majú vždy obsah $(p/4) \cdot x$. Preto pre obsah celého veľkého štvorca platí

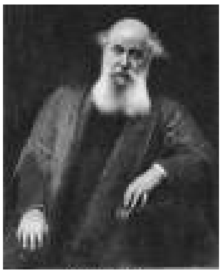
$$P = x^2 + 4 \cdot (p/4) \cdot x + 4 \cdot (p/4)^2 = x^2 + p \cdot x + (p^2/4) = q + (p^2/4).$$

Tento veľký štvorec má veľkosť svojej strany $x + (p/2)$ a teda $P = [x + (p/2)]^2$.
Porovnaním oboch obsahov $[x + (p/2)]^2 = q + (p^2/4)$, z toho vyplýva

$$x = (-p/2) + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \quad \text{(lebo sa uvažovalo iba kladné riešenie).}$$

Dnes týmto spôsobom môžeme didakticky zdôvodniť to, čo nazývame **doplnenie kvadratického výrazu** $\boldsymbol{x^2 + p \cdot x}$ **na úplný štvorec** $\boldsymbol{x^2 + p \cdot x + (p/2)^2 = [x + (p/2)]^2}$.

- **Matematika je hudbou rozumu**



James J. Sylvester (1814–1897), anglický matematik, vtipný muž matematickej kultúry, stelesnená predstava toho, kto žije medzi ideálnymi číslami vysoko nad problémami všedného dňa, tušil, že svet, v ktorom žijeme, je odrazom vyššej zmysluplnosti, ku ktorej sa vierou a rozumom približujeme. *Matematika je skúmanie rozdielnosti v podobnom a podobnosti v rozdielnom... Matematika je najistejšia pôda pre ľudstvo. Zostane nedotknuteľná až kým sa plán univerza, ktorý sa rozprestiera pod našimi nohami ako mapa, nestane súčasťou ľudskej mysle.* Za svoj dlhý život napísal **James Sylvester** viac než 300 odborných prác z algebry, teórie matíc a determinantov, teórie invariantov, pravdepodobnosti, mechaniky a matematickej fyziky. Mal rád riešenie vtipných problémov. Posielal do novín hádanky. S jeho menom je spojená aj táto úloha: Z veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je najväčšia hodnota, ktorá sa nedá vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?

Skúsme sa zamyslieť nad riešením tejto zaujímavej úlohy: Generujme systematickú tabuľku spoločných hodnôt, ktoré dostávame postupným sčítavaním jednotlivých hodnôt známok:

	5	10	15	20	25	...
17	22	27	32	37	42	...
34	39	44	49	54	59	...
51	56	61	66	71	76	...
68	73	78	83	88	93	...

Vidíme, že vieme vytvoriť číselné hodnoty
na konci s číslicou 5 pre čísla $\geq$ 5;
na konci s číslicou 0 pre čísla $\geq$ 10;
na konci s číslicou 7 pre čísla $\geq$ 17;
na konci s číslicou 2 pre čísla $\geq$ 22;
na konci s číslicou 4 pre čísla $\geq$ 34;

na konci s číslicou 9 pre čísla ≥ 39;
na konci s číslicou 1 pre čísla ≥ 51;
na konci s číslicou 6 pre čísla ≥ 56;
na konci s číslicou 8 pre čísla ≥ 68;
na konci s číslicou 3 pre čísla ≥ 73;
teda najväčšou hodnotou, ktorá sa z daných hodnôt nedá vytvoriť je **63**.

- **Stručné spomienky na matematikov**

♣ Obdivoval usporiadanie čísel do magických štvorcov. V geometrii vytušil nové možnosti využívaním súradníc. Vybadal spojenie medzi úlohami na určovanie dotyčníc. Bol právnikom, matematiku sledoval ako záľubu. **Pierre Fermat** (20.8.1601–12.1.1665), francúzsky sudca, do dejín matematiky sa zapísal svojou domnienkou, ktorá prežila bez dôkazu celé storočia (Fermatovu vetu dokázal A. Wiles, 1993–94). Napĺňa sa jeho predpoveď: *Mnohí budú prichádzať a odchádzať, ale veda sa bude stále obohacovať*. Korešpondencia s B. Pasca1om sa zapísal do základov teórie pravdepodobnosti.

♣ Považoval štúdium prírody za najplodnejší prameň matematických objavov. *Matematika je povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života.* Dokázal vetu o počte reálnych koreňov algebraickej rovnice medzi danými hodnotami premennej. **Jean Baptiste Joseph Fourier** (21.3.1768–16.5.1830), francúzsky matematik a fyzik, sa stal zakladateľom a priekopníkom matematickej fyziky. Podal teóriu vedenia tepla, ukázal novú metódu riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc. Jeho špeciálne transformácie našli použitie pri štúdiu kmitov, pri riešení problémov oznamovacej techniky, optiky a kybernetiky.

♣ Prvá profesorka matematiky v Európe prednášala na univerzite v Štokholme (od 1884). *Medzi všetkými vedami, ktoré odkrývajú ľudstvu cestu k poznaniu zákonov prírody, najmohutnejšia a najvznešenejšia je matematika*. **Sofia Vasiljevna Kovalevská** (15.1.1850–10.2.1891), ruská matematička, vytvorila znamenité štúdie v teórii diferenciálnych rovníc a analytickej mechanike. Získala Bordinovu cenu, ocenenia parížskej Akadémie vied, Švédskej akadémie i členstvo v Akadémii vied v Petrohrade. Vynikala matematickou erudíciou, literárnym talentom a ľudskou odvahou. Zvýraznila právo sebauplatnenia žien v oblastiach dovtedy pre nich nedostupných.

♣ Prispel k aritmetizácii matematiky, podal aritmetickú definíciu iracionálnych čísel. **Karl Weierstrass** (31.10.1815–19.2.1897), nemecký matematik, dobudoval základy matematickej analýzy, vytvoril presne zdôvodnenú teóriu eliptických funkcií, ovplyvnil teóriu analytických funkcií i variačný počet. Vedel, že matematika nesmie strácať kontakt s ďalšími vedami. *Nemožno byť skutočným matematikom a nebyť trochu aj básnikom.*

♣ *Vo svojej práci som sa vždy pokúšal zjednotiť pravdu s krásou.* Vyštudoval u Davida Hilberta v Nemecku, pôsobil v Princetone (USA). **Hermann Weyl** (9.11.1885–8.12.1955), matematik, fyzik i filozof, rozvinul teóriu spojitých grúp i aditívnu teóriu čísel. Zaslúžil sa o modernú interpretáciu časopriestoru a hmoty. *Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka.*

- **Test z dejín matematiky**

1. **Platón** (427–347 pred n. l.) skúmal aj pravidelné konvexné mnohosteny, ktoré po ňom pomenovali *platónske telesá*. Ktorý z dolu uvedených pravidelných mnohostenov neexistuje ?
   A) pravidelný osemsten B) pravidelný dvanásťsten
   C) pravidelný šesťnásťsten D) pravidelný dvadsaťsten
2. **Eudoxos z Knidu** (asi 408–355 pred n. l.) bol Platónov žiak. Ako sa volá Eudoxom navrhnutá metóda určovania obvodov alebo obsahov rovinných útvarov?
   A) regula falsi B) metóda dotyčníc
   C) metóda substitúcie D) exhaustačná metóda
3. **Archimedes zo Syrakúz** bol zavraždený pri obliehaní svojho mesta rímskymi vojakmi. Pred svojou smrťou vraj vykríkol: *Noli tangere circulos meos – Nedotýkaj sa mojich kruhov*. V ktorom roku sa toto stalo?
   A) 512 pred n. l. B) 212 pred n. l.
   C) 112 pred n. l. D) 112 n. l.
4. Kto je autorom najstaršieho zachovaného spisu o kužeľosečkách – *Kónika* (8 zväzkov, prvé štyri knihy sú v gréčtine, ďalšie tri v arabštine a posledná sa stratila)?
   A) *Táles z Milétu* B) *Aristarchos zo Samu*
   C) *Diofantos z Alexandrie* D) *Apollonios z Pergy*
5. Aj na stredovekých univerzitách boli slobodné umenia rozdelené na trívium a kvadrívium. Čo nepatrí do trívia?
   A) gramatika B) rétorika
   C) aritmetika D) dialektika
6. Učiteľ, filozof a básnik na dvore Karola Veľkého v Aachene **Alcuin z Yorku** (asi 735–804) poúčal svojich blížnych rukopisom, v ktorom je uvedená aj dnes známa príhoda o vlkovi, koze a hlávke kapusty a ich prevoze cez rieku za daných podmienok. Aký bol názov tejto práce?
   A) *Hádanky pre bystrých* B) *Úlohy pre cibrenie umu mladých*
   C) *Tajomstvo úspechu* D) *Riešenia potešia*
7. Ktorá matematická krivka, vystihujúca určitý mechanický pohyb, sa prezýva *krásna trojská Helena geometrie*?
   A) cykloida B) konchoida
   C) kvadratrix D) evolventa
8. Kto napísal roku 1202 knižku o používaní indicko–arabských číslic pod názvom *Liber Abaci*, v ktorej riešenie jednej nenápadnej úlohy neskôr získalo označenie *Fibonacciho postupnosť*?
   A) *Luca Pacioli* B) *Bonaventura Cavalieri*
   C) *Leonardo Pisanský* D) *Gerardo z Cremony*
9. **Luca Pacioli** (asi 1445–1514) vydal v roku 1509 matematickú knižku o tzv. zlatom reze, ktorú ilustroval Leonardo da Vinci (1452–1519). Aký bol názov tohto diela?
   A) *Almagest* B) *De divina proportione*
   C) *Liber embadorum* D) *Ars Magna*
10. V ktorom roku zaviedol **John Napier** v zápisoch čísel desatinnú čiarku?
    A) 1417 B) 1517
    C) 1617 D) 1717
11. Od roku 1557 používal **R. Recorde** pre označenie rovnosti znak = . Kto prvý použil roku 1655 znak ∞ na označenie nekonečna?
    A) *J. Wallis* B) *J. Hudde*
    C) *W. Oughtred* D) *G. Desargues*
12. *Pravda je tá istá v Toulouse i v Paríži*. Tak hodnotil **B. Pascal** (1623–1662) vo svojej korešpondencii vyriešenie niektorých pravdepodobnostných problémov.
    Kto bol adresátom listu s hore uvedenou vetou?

A) *Ch. Huygens* B) *T. Bayes*
C) *P. Fermat* D) *J. Bernoulli*

13. Päť matematikov (**Clairaut**, **Euler**, **d´Alembert**, **Lagrange**, **Laplace**) si rozdelilo medzi sebou svet, ktorého existenciu odhalil Newton. O ktorom z dole uvedených matematikov sa tvrdí, že je Talian francúzskeho pôvodu či Francúz talianskeho pôvodu?

A) *Lagrange* B) *Laplace*
C) *Euler* D) *Clairaut*

14. Ktorej dole uvedenej práce nie je autor **Bernard Bolzano** (1781–1848), významný profesor pražskej univerzity a najprenikavejší mysliteľ 19. storočia v Čechách?

A) *Rýdzoanalytický dôkaz* B) *Vedoslovie*
C) *Hodnota vedy* D) *Paradoxy nekonečna*

15. V rokoch 1964 až 1988 bol riaditeľom Matematického ústavu SAV v Bratislave. Medzi učiteľmi matematiky boli známe jeho publikácie *O rovnicích* (Praha, 1940), *Algebraické čísla* (Praha, 1950), *Základy náuky o riešení rovníc* (Praha, 1958). Vo svete bol uznávaným odborníkom v teórii pologrúp. O ktorom slovenskom matematikovi sme hovorili?

A) *Š. Schwarz* B) *J. Hronec*
C) *T. Šalát* D) *M. Kolibiar*

Správne má byť: 1) C; 2) D; 3) B; 4) D; 5) C; 6) B; 7) A; 8) C; 9) B; 10) C; 11) A; 12) C; 13) A; 14) C; 15) A

• Odporúčaná literatúra (vydaná po roku 2000)

ATALAY, B.: *Matematika a Mona Lisa*. Praha: Slovart, 2007.
BARROW, J.D.: *Kniha o nekonečnu*. Praha: Paseka, 2007.
BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve starověku (Egypt a Mezopotámie).* Praha: Prometheus, 2003.
BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Praha: Prometheus, 2001.
BEČVÁŘOVÁ, M.: *Eukleidovy ZÁKLADY, jejich vydání a překlady*. Praha: Prometheus, 2002.
DERBYSHIRE, J.: *Posedlost prvočísly*. Praha: Academia, 2007.
DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky*. Praha: Argo a Dokořán, 2002.
DEVLIN, K.: *Problémy pro třetí tisíciletí (Sedm největších nevyřešených otázek matematiky).* Praha: Argo/Dokořán, 2005.
FOLTA, J.: *Dějiny matematiky I*. Praha: NTM, 2004.
JEDINÁK, D.: *Významné osobnosti matematickej kultúry*. Trnava, Ped. fakulta TU, 2002.
LIVIO, M.: *Neřešitelná rovnice*. Praha: Argo/Dokořán, 2008.
LIVIO, M.: *Zlatý řez*. Praha: Argo/Dokořán, 2006.
MAČÁK, K.: *Tři středověké sbírky matematických úloh*. Praha: Prometheus, 2001.
MAREŠ, M.: *Příběhy matematiky*. Příbram: Pistorius a Olšanská, 2008.
MLODINOW, L.: *Eukleidovo okno*. Praha: Slovart, 2007.
SCRIBA, C. J. – SCHREIBER, P.: *5000 Jahre Geometrie, Geschichte, Kulturen, Menschen.* Berlin – Heidelberg: Springer Verlag, 2001.
STEWART, I.: *Odsud až do nekonečna (Průvodce moderní matematikou).* Praha: Argo/Dokořán, 2006.
ŠTOLL, I.: *Historky o slavných fyzicích a matematicích*. Praha: Prometheus, 2005.
VOPĚNKA, P.: *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*. Praha: Práh, 2004.

Záver

Analýzou v histórii matematiky možno získať užitočné predstavy o genéze myslenia a tieto potom aplikovať pri vyučovaní (M. Hejný), preto chcem upozorniť na povinnosť učiteľov matematiky pripravovať a ponúkať vo vyučovaní nášho predmetu zážitky matematickej kultúry, hlbšieho rozvoja myslenia, presvedčivej argumentácie a všeobecnej kultivovanosti človeka. Ak podporu ideovej a logickej dôslednosti matematických myšlienkových postupov ukotvíme aj mravnou zásadovosťou či príkladným osobným životom, naše výchovno–vzdelávacie pôsobenie sa asi bude limitne blížiť k dokonalosti. Koncentrovaným odkazom nech sú slová G. Piraniana: *Ako učitelia máme mimoriadne dôležitú úlohu, aby sme mládeži odovzdávali niektoré z intelektuálnych hodnôt civilizovaného ľudstva. Našou úlohou je inšpirovať študentov, aby na základe svojich schopností dosiahli čo najvyššiu odbornú i ľudskú úroveň*. Som presvedčený o tom, že prepojenie poznatkov z dejín matematiky s didaktikou vyučovania je veľmi užitočný prostriedok nielen motivácie, ale aj popularizácie matematickej kultúry.

(*Dušan Jedinák*)