

György Pólya – zaujatosť pre správne uvažovanie

Cesty riešenia



Koľko populárnych kníh o riešení matematických úloh poznáte? Svetoznáma, vydanou v 17 jazykoch, v náklade viac než milión výtlačkov, je publikácia **Pólya, G.**: *How to solve it? (Ako to riešiť?)*. Autor sa snaží ukázať logiku objavovania, postupnosť riešenia (vymedzenie a porozumenie problému, strategická analýza ciest riešenia, syntetická realizácia plánu, nájdenie riešenia a jeho overenie, kritické zhodnotenie s dôsledkami a možnosťami využitia). Pri hľadaní riešenia netreba zabudnúť na podobné, zvláštne a analogické problémy, na rozloženie do dielčích úloh. *Výsledkom tvorivej práce matematika je dôkaz a ten sa objavuje na základe dôveryhodných úvah, s pomocou pravdepodobných domnienok... pre dômyselnosť a dôvtip musí byť v matematike miesto.*

Pôsobivo vyučovať

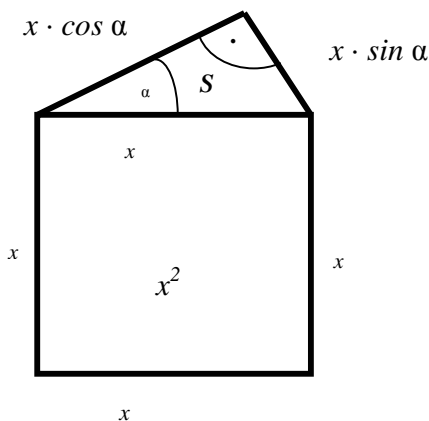
Matematickým poznatkom netreba iba rozumieť a vedieť ich využívať, matematiku je potrebné aj dobre vyučovať. Oba tieto ciele vedel naplniť americký matematik (maďarského pôvodu) a vysokoškolský profesor **György Pólya** (1887–1985). Uvedomil si princípy aktívneho štúdia: *Radosť z objavy je najlepším podnetom pre ďalšiu prácu. Najlepšia cesta ako sa niečo naučiť, je, objaviť to.* Dokázal, že pri štúdiu matematiky možno tieto zásady vhodne uplatniť. Spoznal, že matematika je vtedy zaujímavá, keď živí našu vynachádzavosť a zdatnosť usudzovania. Vyžadoval nezávislosť myslenia, tvorivý rozum, originálnosť, vynaliezavosť. Hovorieval: *Učenie začína činnosťou a jednaním, postupuje k slovám a predstavám a malo by končiť žiadanými algoritmami rozumového uvažovania.* Učiteľom matematiky odkázal: *Učte žiakov rozmyšľať.* Študentom naznačil a mnohých aj presvedčil: *Krása matematiky je v tom, nachádzať pravdu bez ťažkostí.*



Nečakaný dôkaz

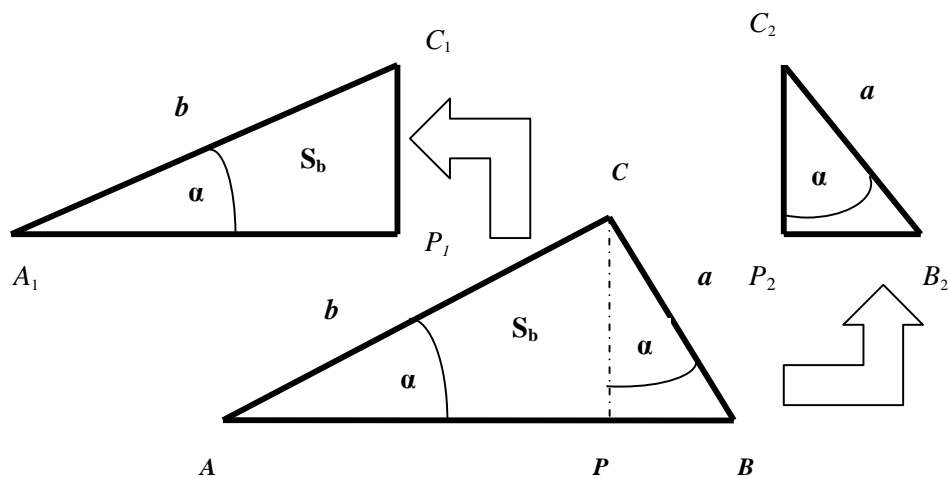
Pólya bol známy aj tým, že ponúkal zaujímavé dôkazy známych matematických viet. Vo svojich didaktických prácach uviedol aj takýto dôkaz Pytagorovej vety:

Osnačme si dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka písmenom x , potom obsah tohto trojuholníka môžeme vyjadriť (v súlade so vzťahmi vyznačenými na dolu uvedenom obrázku) ako



$$S = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = k \cdot x^2, \text{ kde } k = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Potom pre každý pravouhlý trojuholník ABC (pozri obr.) môžeme jeho obsah vyjadriť ako súčet jeho čiastočných obsahov



$$S_c = S_a + S_b \text{ a teda aj ako } k \cdot c^2 = k \cdot a^2 + k \cdot b^2, \text{ kde } k = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

a to je vyjadrenie Pytagorovej vety $c^2 = a^2 + b^2$.

Zo života G. Polyu

Narodil sa v Budapešti 13. decembra 1887. Už po skončení strednej školy, v ktorej často obsadzoval popredné umiestnenia v matematických súťažiach nadaných študentov, sa rozhodol pre profesiu matematika. *Nepokladal som sa za dosť dobrého pre fyziku a bol som príliš dobrý pre filozofiu: Matematika bola uprostred.* Univerzitné štúdiá dokončil v Budapešti (1912). Počas vysokoškolského štúdia i po ňom (1912–1914) bol určitý čas na študijných pobytoch na univerzitách v Paríži, Viedni i v Göttingene. Zoznámil sa s významnými matematikmi a poznal moderné smery v matematike. Viac ako 25 rokov pôsobil v Polytechnickej škole v Zürichu (1914–1940), kde sa stal vysokoškolským profesorom (1928). Poriadal prednášky a kurzy na rôznych univerzitách v Európe i v Amerike. V roku 1940 odišiel natrvalo do USA. Tam pôsobil na Stanfordskej univerzite v Kalifornii až do odchodu na penziu (1953). Ešte ako 90-ročný aktívne pracoval so študentmi. Až do posledných dní mal všestranné záujmy, vrodenu čulosť povahy, sympatickú láskavosť k ľuďom. Zomrel 7. 9. 1985 v Stanforde.



Veda i vyučovanie

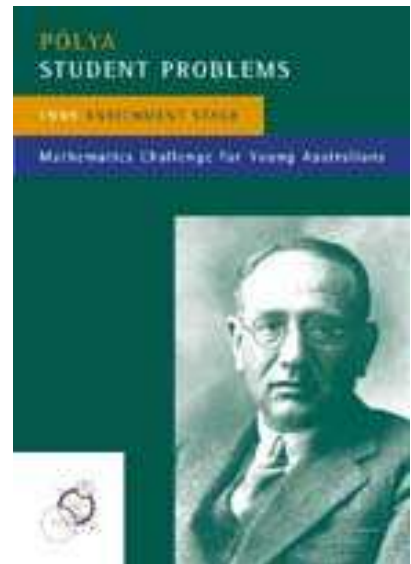
Vedeckým záujmom **G. Pólya** boli rôzne oblasti teoretickej i aplikovanej matematiky. Rozvinul kombinatorickú analýzu, dosiahol úspešné výsledky vo funkcionálnej analýze, matematickej štatistike i v teórii čísel. Zásadne ovplyvnil postavenie matematickej fyziky. Teoreticko–pravdepodobnostnými výsledkami a prácami z oblasti nerovností prispel k novým aplikáciám mnohých matematických disciplín. Za výsledky svojich matematických prác, napísal viac než 230 pojednaní, sa stal členom americkej akadémie vied v Bostone i Národnej akadémie vo Washingtone. Bol zahraničným členom akadémii v Maďarsku a vo Francúzsku. Z viacerých vedeckých ocenení spomeňme, že od Americkej matematickej spoločnosti získal cenu „Za mimoriadne zásluhy v matematike“ (1963).



Ovplyvnil mnohých svojich študentov a trvalo ich pripútal k štúdiu matematiky alebo jej vyučovaniu. Učiteľom vždy zdôrazňoval: *Nechajte svojich študentov klásť otázky alebo sa pýtajte tak, ako sa oni môžu pýtať. Nechajte svojich študentov odpovedať alebo dávajte odpovede, ktoré oni môžu dávať. Vyhýbajte sa odpovediam na otázky, na ktoré sa nik nepýtal, ani vy sami... Vyučovanie má žiaka pripraviť pre objavy alebo vo väčšej miere dať niektoré predstavy o objavoch.* Mnohé pedagogicko–didaktické práce **G. Pólya** sú ukázkami objavných postupov pri matematickom štúdiu. Človekovi, ktorý chce pre matematické poznanie venovať čas a prácu, sa dá pomôcť. Možno stačí, ak uverí, že ovládať matematiku znamená tvorivo riešiť úlohy, robiť vlastné matematické objavy. *Veľký objav rieši veľký problém, ale zrno objavu je v každom probléme.* **Pólyove** heuristické metódy sú dodnes ukážkou možnosti, ktoré treba pri vyučovaní matematiky nasledovať a rozvíjať. *Štúdium umenia riešiť úlohy je výchovou vôle.*

Spôsob myslenia

György Pólya zvyrazňoval rozvíjanie hodnotiaceho myslenia, zovšeobecňovanie a systematickú činnosť s vierohodnými úvahami. Učil organizovať myslenie v postupnosti zmysluplných krokov na základe vlastnej myšlienkovvej aktivity pri odhaleniach metód a s primeraným vnútorným záujmom na vyriešení problémov. Vedel vyhľadávať inšpiráciu vo vonkajšom svete, bol prístupný reálnym aplikáciám. Ako matematik je známy hlavne pre svoje dielo pedagogické a názory didakticko–matematické. Vedel jasne a hutne formulovať myšlienky o heuristike a dôveryhodnom uvažovaní. Odhalil podstatné vzťahy medzi pozorovaním, hypotézami a ich overením. Dôveryhodnosť chápal ako kvalitatívnu pravdepodobnosť. Vynikal intelektuálnym zápalom pre matematickú kultúru, v ktorej vysoko oceňoval každé samostatné a tvorivé myslenie. Matematika bola pre neho jazykom, intelektuálnym cvičením i vedou. Didaktika matematiky musí hľadať odpovede na otázku čo a ako vyučovať, aké problémové úlohy riešiť.



Nie každý uznávaný matematik bol aj obľúbeným učiteľom alebo uznávaným didaktikom. **György Pólya** patril k tým učencom, ktorí účinnou metodológiou a jednoduchými prostriedkami získavali nielen úžasné odborné výsledky v matematických disciplínach, ale aj pri šírení kultúry matematického spôsobu myslenia v školách. *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktorú môže byť potom používaná na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.*

Dušan JEDINÁK