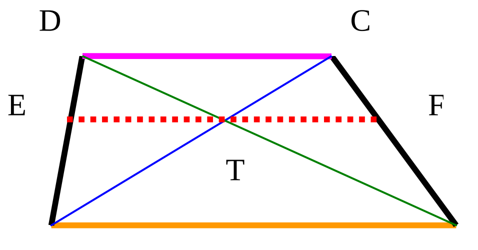
Uvidieť harmonický priemer

Úloha: Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je **harmonickým** priemerom veľkostí oboch jeho základní.

Riešenie:
Označme patričné body ako na obr. 1., kde $|AB| = a$, $|CD| = c$.



obr. 1

Trojuholníky *ABT* a *CDT* sú podobné (podľa vety *uu*, rovnobežky preťaté priečkou – striedavé uhly). Potom platí $|AT| : |TC| = a : c$, t.j. $|TC| = \frac{c}{a} \cdot |AT|$.
Trojuholníky *TFC* a *ABC* sú tiež podobné (podľa vety *uu*) s koeficientom podobnosti

$$\frac{|TC|}{|AC|} = \frac{|TF|}{|AB|}.$$

Teda môžeme vyjadriť $|TF| = \frac{|TC|}{|AC|} \cdot |AB|$,

t.j. $$|TF| = \frac{c}{a} \cdot \frac{|AT| \cdot |AB|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Podobne pre trojuholníky *TEA* a *CDA* s koeficientom podobnosti $\frac{|AT|}{|AC|} = \frac{|ET|}{|DC|}$ platí

$$|ET| = \frac{c \cdot |AT|}{|AC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Potom platí
$|EF| = |ET| + |TF| = 2 \cdot \frac{a \cdot c}{a + c} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$ a to je **harmonický priemer** a, c.