Cifry, cifry, cifričky...

Úvod

Existujú celkom zaujímavé matematické úlohy už pre základné školy s využitím číslic (cifier) hľadaných alebo daných čísiel a ich vlastností. Uvádzam šesť zadaní a ich riešení s rôznym stupňom náročnosti.

Počet cifier

Úloha: Koľko cifier má číslo ($4^5 \cdot 5^{13}$) ?

Riešenie:
$4^5 \cdot 5^{13} = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = 5^3 \cdot 10^{10} = 125 \cdot 10^{10}$, teda skúmané číslo má 13 cifier.

Najmenšie s daným ciferným súčtom

Úloha: Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2008.

Riešenie:
Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať aj čo najnižší rád, t.j. počet nenulových cifier, teda čo najviac číslic 9. Pretože 2008 : 9 = 223 + 1/9, hľadané číslo je 199.........9 (jednotka a za ňou 223 ráz číslica 9).

Podmienky na ciferný súčet i ciferný súčin

Úloha: Nájdite najväčšie trojciferné číslo, ktorého ciferný súčet je prvočíslo a ciferný súčin sa rovná tretej mocnine prirodzeného čísla.

Riešenie:
Označme hľadané trojciferné číslo v tvare $\underline{x\,y\,z}$ t.j. $x \cdot 100 + y \cdot 10 + z$, kde $x \geq y \geq z$, lebo chceme čo najväčšie. Pre súčin cifier má platiť $x \cdot y \cdot z = m^3$, $m \in N$.

Skúsme $x = 9 = 3^2$ (chceme najväčšie), potom $y{\cdot}z = 3{\cdot}1^3 \cup 3{\cdot}2^3$, lebo potrebujeme exponent 3. Potom

- pre $y = 3$, $z = 1$ je ciferný súčet $9 + 3 + 1 = 13$;
- pre $y = 8 = 2^3$, $z = 3$ je ciferný súčet $9 + 8 + 3 = 20$ (nie je prvočíslo);
- pre $y = 6 = 2{\cdot}3$, $z = 4 = 2^2$ je ciferný súčet $9 + 6 + 4 = 19$. Úlohe vyhovuje číslo **964**.

Hľadanie poslednej číslice

Úloha: Dokážte, že číslo ($123^{123} - 57^{57}$) je deliteľné číslom 10.

Riešenie:
Hneď nás napadne: stačí ukázať, že posledná cifra rozdielu musí byť nula, teda 123^{123} aj 57^{57} musia mať poslednú cifru rovnakú. Určíme posledné cifry daných čísel.

Posledná cifra čísla 123^{123} je posledná cifra čísla $3^{123} = 3^{120} \cdot 3^3 = (3^4)^{20} \cdot 27 = (81)^{20} \cdot 27$. To znamená, že posledná cifra je 7.

Posledná cifra čísla 57^{57} je posledná cifra čísla $7^{57} = 7^{4\cdot 14+1} = (7^4)^{14} \cdot 7 = (2401)^{14} \cdot 7$, teda posledná cifra je 7.

Ukázali sme, že rozdiel $123^{123} - 57^{57}$ má poslednú cifru $7 - 7 = 0$ a teda skúmané číslo je deliteľné číslom 10.

Súčet niektorých cifier

Úloha: Nájdite všetky štvorciferné prirodzené čísla deliteľné siedmimi, pre ktoré zároveň platí: súčet ich prvých dvoch cifier je10; súčet druhých dvoch cifier je10; súčet ich posledných dvoch cifier je 9.

Riešenie:
Ak si označíme jednotlivé cifry písmenami ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, (číslo ***abcd***) tak by o nich malo platiť:

$a + b = 10 \wedge b + c = 10 \wedge c + d = 9$, to znamená, že $a = c$, $b = 10 - a$, $d = 9 - a$.

Po vyplnení tabuľky pre $a \in \{1, 2, ... 9\}$ dostaneme:

a	*b*	*c*	*d*
1	**9**	**1**	**8**
2	8	2	7
3	7	3	6
4	6	4	5
5	5	5	4
6	4	6	3
7	3	7	2
8	**2**	**8**	**1**
9	1	9	0

Z nich vyberieme tie, ktoré sú deliteľné siedmimi: **1918** a tiež **8281**.

Dvadsať cifier

Úloha: Nech p je ľubovoľné prvočíslo väčšie ako 3. Dokážte, že ak číslo p^n má práve 20 cifier, potom niektoré tri z nich sú rovnaké.

Riešenie:
Predpokladajme, že číslo p^n (p je prvočíslo väčšie ako 3) má práve 20 cifier a žiadne tri z nich nie sú rovnaké. Ak nie sú žiadne tri cifry čísla p^n rovnaké, tak dvadsaťciferné číslo p^n obsahuje každú z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 práve dvakrát. Teda ciferný súčet čísla p^n je $2\cdot(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 90$. Z toho vyplýva, že p^n je deliteľné 3. Ale to je spor, pretože číslo p je prvočíslo väčšie ako 3 a teda nie je deliteľné tromi. Teda ani p^n nie je deliteľné tromi. Preto, ak p^n má práve 20 cifier (p je prvočíslo väčšie ako 3), tak niektoré tri z týchto dvadsiatich cifier čísla p^n musia byť rovnaké.

(*Dušan Jedinák*)