Ukazovať užitočné aritmetické i algebrické úpravy

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

Úvod

V matematike spravidla rozumieme pod pojmom algebra počítanie s písmenami vo význame čísiel (potom i náuku o riešení rovníc a neskôr aj teóriu grúp, okruhov a telies). Aritmetika sa zaoberá vyšetrovaním vlastností čísiel (pôvodne prirodzených, neskôr aj z ďalších číselných množín). Školská matematika spája do aritmetiky aj začiatky algebry a teórie čísiel. V škole je nevyhnutné ukazovať zmysluplnosť základných algebrických a aritmetických úprav, aby žiaci videli ich efektívnosť. Na vybraných príkladoch ponúkam ukážky tejto matematickej „klasiky".

Zázračné krátenie zlomkov

Úloha: Nájdite všetky také zlomky s dvojciferným čitateľom a dvojciferným menovateľom, v ktorých sa cifry neopakujú, ale umožňujú naznačené „zázračné krátenie":

$$\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$$

Riešenie:
Aj keď sa takéto krátenie v žiadnej škole všeobecne neuznáva, existujú prípady, že to niekedy „bude dobre". Hľadáme zlomky tvaru:

$$\frac{10a+b}{10b+c}$$

kde $a, b, c \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$, ale $a \neq b,\ b \neq c$.

A. Potom by „zázračným krátením" malo platiť:

$$\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$$

teda aj

$$c = \frac{10a.b}{9a+b}$$

Po postupnej voľbe príslušných dvojíc a, b (máme 9.8 = 72 možností), dostaneme, že vyhovujú:

$a = 1 \quad b = 6 \quad c = 4$
$a = 1 \quad b = 9 \quad c = 5$
$a = 2 \quad b = 6 \quad c = 5$
$a = 4 \quad b = 9 \quad$ c = 8

B. Vzťah $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$ upravíme na tvar 10$a.c$ + $b.c$ = 10$a.b$ + $a.c$, teda aj 10a.(c-b) = c.(a-b),

ale aj 10a.(b-c) = c.(b-a). To ale znamená, že na ľavej strane rovnice je číslo s nulou na konci, teda aj na pravej strane rovnice musí byť číslo končiace nulou, t.j. súčin c.(b-a) je súčinom čísla 5 a párneho čísla. Ak zvážime, že b>c i b>a, tak preveríme týchto 24 možností:

***c* = 5,**	*b* – *a* je párne	***c* je párne,**	*b* – *a* = 5
	6 – 2	***c* = 2**	6 – 1
	6 – 4		7 – 2
	7 – 1		8 – 3
	7 – 3		9 – 4
	7 – 5	***c* = 4**	6 – 1
	8 – 2		7 – 2
	8 – 4		8 – 3
	8 – 6		9 – 4
	9 – 1	***c* = 6**	7 – 2
	9 – 3		8 – 3
	9 – 5		9 – 4
	9 – 7	***c* = 8**	9 - 4

Zase dostaneme, že vyhovujú
$a = 1 \quad b = 6 \quad c = 4$
$a = 1 \quad b = 9 \quad c = 5$
$a = 2 \quad b = 6 \quad c = 5$
$a = 4 \quad b = 9 \quad \mathrm{c} = 8$

Toto „zázračné krátenie“ možno uplatniť len na zlomkoch: $\frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}.$

Čo je väčšie?

Úloha: Rozhodnite, ktoré zo zadaných čísiel je väčšie, ale bez kalkulačky a tabuliek. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

$a)\quad \sqrt[5]{5},\ \sqrt{2}$ $\qquad b)\quad \sqrt{7}+\sqrt{10},\ \sqrt{3}+\sqrt{19}$

$c)\quad 639^{9},\ 638^{9}+638^{8}$ $\qquad d)\quad \frac{13^{1978}+1}{13^{1979}+1},\ \frac{13^{1979}+1}{13^{1980}+1}$

$e)\quad 3^{303},\ 2^{454}$

Riešenie:

a) Ak by sme obe čísla umocnili na 10, tak dostaneme: $\left(\sqrt[5]{5}\right)^{10} = 25,\ \left(\sqrt{2}\right)^{10} = 2^5 = 32.$
Pretože 32 > 25, tak „spätným postupom“ dostávame $\sqrt{2} \rangle \sqrt[5]{5}$.

b) predpokladajme (hypotéza), že platí:
$\sqrt{7}+\sqrt{10} \langle \sqrt{3}+\sqrt{19}$
a postupne upravujme (umocnením na druhú)
$7+2.\sqrt{7}.\sqrt{10}+10 \langle 3+2.\sqrt{3}.\sqrt{19}+19$
$2.\sqrt{70} \langle 5+2.\sqrt{57} \quad /^2$
$4.70 \langle 25+20.\sqrt{57}+57.4$
$280 \langle 253+20.\sqrt{57}$
$27 \langle 20.\sqrt{57};$
pretože √57 > 2, tak to platí. Dôkaz by sme viedli „spätným“ postupom.
Ukázalo sa, že $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ je väčšie ako $\sqrt{7}+\sqrt{10}$.

c) Nech A = 639^9 , B = $638^9 + 638^8$.

Upravujeme: A = $639.(639^8)$, B = $638^8.(638+1) = 639.(638^8)$,

pretože $639^8 > 638^8$, tak A > B.

d) ak si označíme A = 13^{1978}, rozdiel daných čísiel môžeme vyjadriť:

$$\frac{A+1}{13A+1}-\frac{13A+1}{13^2A+1}=\frac{169A^2+170A+1-169A^2-26A-1}{(13A+1).(169A+1)}=\frac{144A}{(13A+1).(169A+1)}\rangle 0,$$

teda prvé číslo je väčšie ako to druhé.

e) rozložme dané čísla:

A = $3^{303} = 3^{50}.3^6.3^3$ B = $2^{454} = 2^{50}.2^9.2^4$

pretože: $3^{50} > 2^{50}$ a $3^6 > 2^9$ $[(3^2)^3 > (2^3)^3$ lebo $9 > 8]$ i $3^3 > 2^4$,

vynásobením týchto „kladných súhlasných“ nerovností dostávame, že A > B, teda $3^{303} > 2^{454}$.

So základnými vedomosťami a vhodnými algebrickými úpravami niekedy nepotrebujeme pre vyriešenie aritmetickej úlohy ani kalkulačku ani matematické tabuľky.

Kalkulačka nepomáha?

Úloha: Dokážte, že číslo $(123^{123} - 57^{57})$ je deliteľné desiatimi.

Riešenie:

Stačí ukázať, že na konci tohto čísla je nula. To znamená, že čísla 123^{123} a 57^{57} by mali mať na konci rovnakú číslicu. Skúmajme: $123^{123} = 123^{120+3} = 123^{120} . 123^3$, pretože $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, ..., na konci sa postupne striedajú štyri cifry 3, 9, 7, 1, ...

Číslo 123^{120} má teda na konci číslicu 1, číslo 123^3 má na konci číslicu 7, to znamená, že 123^{123} má poslednú číslicu 7.

Podobne pre $57^{57} = 57^{56} . 57^1$, pretože $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, ..., striedajú sa na konci vždy štyri cifry v poradí 7, 9, 3, 1, ...

Číslo 57^{56} má poslednú číslicu 1 ($57^{56} = 57^{4\,.\,14}$) a číslo $57^{56} . 57^1$ má na konci 7.

Teda rozdiel $(123^{123} - 57^{57})$ má na posledných cifrách rozdiel (7 – 7) = 0,

a jeho posledná cifra je 0, to znamená že skúmané číslo $(123^{123} - 57^{57})$ je deliteľné desiatimi.

To, čo chcú, si aj pripravili

Úloha: Stanovte hodnotu súčinu $p.\,q$, ak p, q sú navzájom rôzne reálne čísla, pre ktoré platí:

$$\frac{1}{1+p^2}+\frac{1}{1+q^2}=\frac{2}{1+p.q}$$

Riešenie:
Zdá sa, že nechcú od nás vedieť, aká je hodnota zvlášť pre p a zvlášť pre q.

Tak si všímajme iba súčin $(p \,.\, q)$.

Ak platí daná rovnosť, tak z nej vyplýva:

$(1 + q^2) \,.\, (1 + p.\, q) + (1 + p^2) \,.\, (1 + p.\, q) = 2.\, (1 + p^2) \,.\, (1 + q^2)$,

po rozpísaní a úprave

$p^3.\, q + p.\, q^3 - 2.\, p^2.\, q^2 = p^2 - 2.\, p.\, q + q^2$

$p \,.\, q \,.\, (p^2 - 2.\, p.\, q + q^2) = (p - q)^2$

$p.\, q.\, (p - q)^2 - (p - q)^2 = 0$

$(p - q)^2 \,.\, (p.\, q - 1) = 0$.

Pretože $p \neq q$ (vyplýva to z textu úlohy), tak musí byť $(p.\, q - 1) = 0$, teda $(p \,.\, q) = 1$.

Záver
Učitelia aj študenti potrebujú poznať jednoduché a prehľadné príklady nenáročných matematických obratov a ich použitia. Primeraná zručnosť s matematickými aritmetickými i algebrickými úpravami môže byť často naozaj užitočná skúsenosť.